Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cesare Parenti

Parametrici "ottimali" per certi operatori di Green. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.3, p. 332–337.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_3_332_0>

Teoria degli operatori. — *Parametrici «ottimali» per certi operatori di Green* (*). Nota II di CESARE PARENTI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — Some results concerning the parametrices for some elliptic Green operators are proved.

Questa Nota fa seguito alla Nota I [questi «Rendiconti», *56* (2), 204–208 (1974)] alla quale rinviamo per le notazioni e la bibliografia.

INTRODUZIONE

Si considerano operatori di Green del tipo $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A \\ T \end{bmatrix}$ dove A è un operatore differenziale ellittico su una varietà compatta con bordo e T è un operatore di traccia (a componenti pseudo-differenziali) sul bordo. Utilizzando un importante risultato stabilito in [5], proviamo che se $\mathcal{A}$ è ellittico a sinistra allora tra gli operatori di Green che sono parametrici sinistre per $\mathcal{A}$ ne esiste uno, $\mathcal{G}$, ottimale, cioè tale che $\mathcal{G}\mathcal{A}$–identità è un proiettore sul nucleo di $\mathcal{A}$. Di qui segue che il problema ai limiti $Au = f$, $Tu = \varphi$ ha soluzione se e solo se $\mathcal{A}\mathcal{G}(f, \varphi) = (f, \varphi)$. Infine diamo una applicazione dei risultati ottenuti alla discussione di certi problemi al contorno sopradeterminati, considerati in [6] e [7], pervenendo alla costruzione di una parametrice sinistra ottimale. A nostro avviso è così possibile migliorare, almeno nel caso dei coefficienti C^∞, i risultati annunciati in [6].

RICHIAMI

Sia Ω una varietà reale C^∞ compatta con bordo Γ (si pone $\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Gamma$) immersa regolarmente in una varietà compatta e senza bordo X (della stessa dimensione di $\overline{\Omega}$). Se $A \in L^m(X; E, F)$, definiamo

$$A_\Omega : \ C^\infty(\overline{\Omega}, E) \to C^\infty(\Omega, F)$$

ponendo $A_\Omega u = (A\tilde{u})/\Omega$, dove $\tilde{u}$ è il prolungamento di u con lo zero in $X \setminus \overline{\Omega}$. Si dice che A gode della *proprietà di trasmissione* relativamente a Γ se $A_\Omega u \in C^\infty(\overline{\Omega}, F)$ (cfr. [2]). Ciò accade, in particolare, se A è un operatore differenziale oppure una parametrice di un operatore differenziale ellittico,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta del 9 febbraio 1974.

Ricordiamo (cfr. [2]) che si chiama *operatore di Green* in $\bar{\Omega}$ una matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} A_\Omega + G & K \\ T & Q \end{bmatrix}$$

dove A è un operatore pseudo-differenziale con la proprietà di trasmissione relativamente a Γ, G è un operatore di *Green singolare*, K è un operatore di *Poisson*, T è un operatore di *traccia* e Q è un operatore pseudo-differenziale sul bordo (rinviamo a [2] per le definizioni). In [2] è dimostrato che gli operatori di Green formano un'algebra per l'addizione e la composizione. Consideriamo un operatore di Green del tipo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_\Omega \\ T \end{bmatrix} \tag{1}$$

dove A è un operatore *differenziale* di ordine m, ellittico su X, e

$$T = (T_1, \cdots, T_J) \quad , \quad T_j = \sum_{k=0}^{m-1} B_{jk}\gamma_k , \qquad 1 \le j \le J , \tag{2}$$

essendo i B_{jk} operatori pseudo-differenziali su Γ e γ_k l'operatore che ad ogni sezione associa la traccia su Γ della sua derivata normale k-ma (si suppone di aver fissato un campo C^∞ normale a Γ e diretto verso l'interno di $\bar{\Omega}$). Avremo quindi

$$\mathcal{A} : C^\infty(\bar{\Omega}, E) \to C^\infty(\bar{\Omega}, F) \oplus C^\infty(\Gamma, H) \tag{3}$$

con continuità, per certi fibrati E, F ed H. Poniamo poi

$$N(A) = \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}, E) \mid A_\Omega u = 0, \ \gamma_j u = 0, \ 0 \le j \le m-1\}. \tag{4}$$

Essendo A ellittico, N(A) è identificabile con il sottospazio delle sezioni $v \in C^\infty(X, E)$ tali che $Av = 0$ in X e $\operatorname{supp}(v) \subset \bar{\Omega}$.

In [5] è dimostrato che esiste un operatore di Poisson

$$K : C^\infty(\Gamma, \oplus_m E) \to C^\infty(\bar{\Omega}, E) \tag{5}$$

tale che: i) $\operatorname{Ker} A_\Omega = N(A) \oplus \operatorname{Im} K$; ii) l'operatore $K^+ = \gamma K$, $\gamma = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{m-1})$, è un proiettore pseudo-differenziale di $C^\infty(\Gamma, \oplus_m E)$ su $\gamma(\operatorname{Ker} A_\Omega)$. Poniamo ora la

DEFINIZIONE. *L'operatore di Green* (1) *si dice ellittico a sinistra se*

$$\begin{bmatrix} 1 - K^+ \\ B \end{bmatrix} : C^\infty(\Gamma, \oplus_m E) \to C^\infty(\Gamma, \oplus_m E) \oplus C^\infty(\Gamma, H) \tag{6}$$

con $B = (B_{jk})$, *ha simbolo principale iniettivo.* ∎

La condizione di ellitticità a sinistra può essere espressa in termini equivalenti come segue. È noto che la restrizione di $T^*(\bar{\Omega})$ a Γ si decompone nella somma diretta del fibrato conormale N e del fibrato $T^*(\Gamma)$. Se $\sigma(A)$

è il simbolo principale di A, abbiamo quindi una mappa

$$\sigma(A)\left(x\,,\,-i\frac{\partial}{\partial\nu}\oplus\tau\right):\ \mathscr{S}(\overline{N}_\tau^+)\otimes E_x\to\mathscr{S}(\overline{N}_\tau^+)\otimes F_x$$

per ogni $x\in\Gamma$, $\tau\in T_0^*(\Gamma)/\mathbf{R}_+$, essendo N_τ^+ la fibra dei vettori conormali positivi. È facile provare che $\mathcal{A}$ è ellittico a sinistra se e solo se il problema ai limiti

$$\sigma(A)\left(x\,,\,-i\frac{\partial}{\partial\nu}\oplus\tau\right)u(\nu)=0\quad,\quad\sum_{k=0}^{m-1}\sigma(B_{jk})\,(x\,,\tau)\left(-i\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^k\Big|_{\nu=0+}=0\,,$$

$$1\le j\le J,$$

ha solo la soluzione nulla (in $\mathscr{S}(\overline{N}_\tau^+)\otimes E_x$) per ogni $x\in\Gamma$ e per ogni $\tau\in T_0^*(\Gamma)/\mathbf{R}_+$.

Parametrice per un operatore di Green

Dimostriamo ora il risultato principale.

Teorema 3. *Se l'operatore di Green* (1) *è ellittico a sinistra, esiste un operatore di Green*

(7) $$\mathcal{G}=[E_\Omega+G\quad L]:\ C^\infty(\overline{\Omega}\,,F)\oplus C^\infty(\Gamma\,,H)\to C^\infty(\overline{\Omega}\,,E)$$

tale che

(8) $$\mathcal{G}\mathcal{A}=1-\mathcal{R}$$

essendo $\mathcal{R}$ *un proiettore sul nucleo di* $\mathcal{A}$ [1].

Prova. Sia $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ una base ortonormale (in $H^0(\overline{\Omega}\,,E)$) di $N(A)$ e definiamo

(9) $$p:\ C^\infty(\overline{\Omega}\,,E)\to C^\infty(\overline{\Omega}\,,E)\,,\ p(u)=\sum_{j=1}^{n}\langle u\,,\overline{\varphi}_j\rangle\,\varphi_j\,.$$

Evidentemente p è un proiettore su N(A). D'altra parte, per ipotesi

$$0\longrightarrow C^\infty(\Gamma,\underset{m}{\oplus}E)\xrightarrow{\begin{bmatrix}1-K^+\\B\end{bmatrix}}C^\infty(\Gamma\,,\underset{m}{\oplus}E)\oplus C^\infty(\Gamma\,,H)$$

è un complesso ellittico e quindi, per il Teorema 2, esiste un operatore pseudo-differenziale

$$\Phi:\ C^\infty(\Gamma\,,\underset{m}{\oplus}E)\oplus C^\infty(\Gamma\,,H)\to C^\infty(\Gamma\,,\underset{m}{\oplus}E)$$

tale che

(10) $$\Phi\begin{bmatrix}1-K^+\\B\end{bmatrix}=1-\pi$$

essendo π un proiettore regolarizzante sul nucleo di $\begin{bmatrix}1-K^+\\B\end{bmatrix}$.

(1) Con la terminologia di [2] R è un operatore di Green trascurabile.

Ora, se $u \in \operatorname{Ker} A_\Omega$, per il risultato di [5], sopra ricordato, avremo

$$u = p(u) + K\gamma u \tag{11}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} 1 - K^+ \\ B \end{bmatrix} \gamma u = (0\,, Tu) \tag{12}$$

sicchè, applicando Φ a sinistra in (12),

$$K\Phi\,(0\,, Tu) = u - \alpha\,(u) \tag{13}$$

dove

$$\alpha\,(u) = p\,(u) + K\pi\gamma u\,. \tag{14}$$

Evidentemente

$$\alpha:\ C^\infty(\overline{\Omega}\,, E) \rightarrow \operatorname{Ker} A_\Omega \cap \operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} \mathcal{A}$$

con continuità. Inoltre

$$\alpha^2 = p^2 + p\,K\pi\gamma + K\pi\gamma p + K\pi\gamma\,K\pi\gamma = \alpha$$

in quanto $\gamma p = 0$, $\gamma K = K^+$ e $K^+\pi\gamma = \pi\gamma$ ed inoltre $N(A) \cap \operatorname{Im} K = \{0\}$.

In conclusione α è un proiettore su $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Osserviamo ora che se $f \in A_\Omega(C^\infty_-(\overline{\Omega}\,, E))$, allora f è ortogonale, in $H^0(\overline{\Omega}\,, F)$, ad $N(A^*)$, essendo $N(A^*)$ definito come $N(A)$. In virtù del Teorema 1 esiste una parametrice E di A in X tale che

$$E^* A^* - 1_F \tag{15}$$

sia un proiettore regolarizzante su $\operatorname{Ker} A^*$. È facile provare allora che se $f \in C^\infty(\overline{\Omega}\,, F)$ ed è ortogonale ad $N(A^*)$, allora

$$A_\Omega\, E_\Omega f = f \tag{16}$$

(si tenga conto che $E_\Omega f \in C^\infty(\overline{\Omega}\,, E)$ in quanto E gode della proprietà di trasmissione). Dunque, se $u \in C^\infty(\overline{\Omega}\,, E)$, si ha

$$u - E_\Omega A_\Omega u \in \operatorname{Ker} A_\Omega \tag{17}$$

e quindi, dalla (13),

$$E_\Omega A_\Omega u + K\Phi\,(0\,, T(u - E_\Omega A_\Omega u)) = u - \mathcal{R}\,(u)\,; \tag{18}$$

Dove si è posto

$$\mathcal{R}\,(u) = \alpha\,(u - E_\Omega A_\Omega u) \tag{19}$$

Basterà quindi definire

$$G = [E_\Omega + G \quad L] \tag{20}$$

con

$$G \cdot = K\Phi(0, -TE_\Omega \cdot) \quad , \quad L \cdot = K\Phi(0, \cdot).$$

Si riconosce facilmente che G è un operatore di Green singolare ed L è un operatore di Poisson. Dalle proprietà di α segue poi che $\mathfrak{R}$ è un proiettore su Ker $\mathfrak{A}$. Il teorema è così dimostrato. ■

L'operatore (di Green) $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ è quindi un proiettore sull'immagine (chiusa) di $\mathfrak{A}$, sicchè il problema ai limiti $Au = f$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, F)$; $Tu = \varphi$, $\varphi \in C^\infty(\Gamma, H)$, ha soluzione se e solo se $\mathfrak{A}\mathfrak{G}(f, \varphi) = (f, \varphi)$ ed in tal caso $\mathfrak{G}(f, \varphi)$ fornisce l'unica soluzione u verificante $\mathfrak{R}(u) = 0$.

L'operatore $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ fornisce ancora le condizioni di compatibilità per risolvere il problema qualora f e φ siano distribuzioni opportune (appartenenti, ad esempio, a spazi di Sobolev di ordini abbastanza grandi).

Diamo ora un'applicazione del Teorema 3. Consideriamo un operatore di Green $\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} A_\Omega \\ T \end{bmatrix}$ dove, questa volta, A è un *operatore differenziale sopradeterminato ellittico* d'ordine m su X tra i fibrati E ed F (cioè $\sigma(A)$ è un morfismo iniettivo di $\pi_X^* E$ in $\pi_X^* F$) e T è fornito dalla (2). Poniamo

$$\gamma A_\Omega : C^\infty(\overline{\Omega}, E) \to C^\infty(\Gamma, \underset{m}{\oplus} F) \tag{21}$$

$$u \mapsto \gamma A_\Omega u = (\gamma_0 A_\Omega u, \cdots, \gamma_{m-1} A_\Omega u)$$

e ricordiamo che $A^* A$ è ellittico d'ordine $2m$ su X. Si ha immediatamente il

TEOREMA 4. *Il nucleo di* $\begin{bmatrix} A_\Omega \\ T \end{bmatrix}$ *è uguale al nucleo di* $\begin{bmatrix} (A^* A)_\Omega \\ \gamma A_\Omega \\ T \end{bmatrix}$.

Prova. L'inclusione

$$\operatorname{Ker} \begin{bmatrix} A_\Omega \\ T \end{bmatrix} \subset \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} (A^* A)_\Omega \\ \gamma A_\Omega \\ T \end{bmatrix}$$

è ovvia. D'altra parte, se $(A^* A)_\Omega u = 0$ in Ω e $\gamma A_\Omega u = 0$ in Γ, allora, integrando per parti, dalla relazione

$$0 = \langle (A^* A)_\Omega u, u \rangle$$

si trae $A_\Omega u = 0$. ■

Ora se l'operatore $\begin{bmatrix} (A^* A)_\Omega \\ \gamma A_\Omega \\ T \end{bmatrix}$ è ellittico a sinistra (ciò che accade per gli operatori considerati in [6]), segue dal Teorema 3 l'esistenza di un operatore di Green $[E_\Omega + G \quad L]$ tale che, posto

$$\mathfrak{G} = [E_\Omega + G \quad L] \begin{bmatrix} A_\Omega^* & 0 \\ \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

riesce $\mathcal{G}\begin{bmatrix} A_\Omega \\ T \end{bmatrix} = 1 - \mathcal{R}$, essendo $\mathcal{R}$ un proiettore su $\operatorname{Ker}\begin{bmatrix} A_\Omega \\ T \end{bmatrix}$. Dunque, come al solito, il problema ai limiti (sopradeterminato !)

$$(23) \qquad \begin{cases} A_\Omega u = f & , \quad f \in C^\infty(\overline{\Omega}, F) \\ Tu = \varphi & , \quad \varphi \in C^\infty(\Gamma, H) \end{cases}$$

ha soluzione se e solo se $\left(\begin{bmatrix} A_\Omega \\ T \end{bmatrix} \mathcal{G}\right)(f, \varphi) = (f, \varphi)$.

Osserviamo che, più in generale, è possibile utilizzare il Teorema 3 per migliorare i risultati annunciati in [7]. Rileviamo infine che nella recente Nota [3] sono annunciati dei risultati molto generali circa l'esistenza di problemi al contorno associati a complessi ellittici su varietà con bordo.