

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

GABRIELE KORCHMAROS

## Ovali nei piani di Hall di ordine dispari

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 56 (1974), n.3, p. 315–317.*  
Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1974\\_8\\_56\\_3\\_315\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_3_315_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Geometrie finite.** — *Ovali nei piani di Hall di ordine dispari.*

Nota di GABRIELE KORCHMAROS, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A class of ovals is constructed in any Hall plane of odd order.

È ben noto che ogni ovale di un piano di Galois d'ordine dispari è una conica [10]. È anche nota l'esistenza di ovali nei piani sui quasicorpi commutativi finiti (ovals di Wagner) [13], di ovali diverse dalle coniche nei piani di Galois d'ordine pari (ovals di B. Segre) [11], nonché di ovali nei piani di Lüneburg (ovals di Lüneburg) [6], nei piani di Hughes (ovals di Hughes–Room) [2], [3], [8], nel piano sopra un quasicorpo associativo d'ordine 9 (ovals di Rodriguez) [3], [8], in un piano di André sopra un quasicorpo associativo regolare d'ordine  $q^2$ , con  $q$  dispari [9], in un piano di Moulton <sup>(1)</sup> sopra un quasicorpo non associativo e non distributivo di André d'ordine  $q^2$ , con  $q$  dispari [5].

Nella presente Nota verrà costruita una classe di ovali nei piani di Hall d'ordine dispari.

1. In questo paragrafo si dimostrano due teoremi validi nei piani di Galois d'ordine dispari che ci serviranno per il seguito.

Per cominciare enunciamo una proprietà del piano euclideo riferita alle intersezioni dei lati di un triangolo inscritto in una conica irriducibile ed una retta non passante per nessuno dei vertici di tale triangolo. La proprietà consiste nel fatto che dei tre punti comuni, o tutti risultano esterni alla conica, oppure due di essi sono interni ed uno è esterno <sup>(2)</sup>. Questa proprietà continua a mantenere la propria validità anche nei piani di Galois d'ordine dispari. Passiamo ad enunciarla in quest'ultimo caso:

Sia  $\Omega$  una conica irriducibile in un piano di Galois  $P$ , d'ordine dispari. I punti di  $P$  non situati su  $\Omega$  risultano classificati in punti esterni od interni rispetto ad  $\Omega$ , secondoché per essi passa o non passa qualche tangente ad  $\Omega$ . Consideriamo il triangolo  $ABC$ , inscritto in  $\Omega$ , ed una retta  $l$ , non passante per nessuno dei vertici di  $ABC$ , sicché:

$$A^* = BC \cap l, \quad B^* = AC \cap l, \quad C^* = AB \cap l$$

risultano univocamente determinati.

**TEOREMA 1.** *Per  $A^*, B^*, C^*$ , si presentano soltanto due possibilità: o tutti i tre punti risultano esterni, oppure uno è esterno e gli altri sono interni.*

(\*) Nella seduta del 9 marzo 1974.

(1) Un piano di Moulton sopra un quasicorpo finito viene definito come il « shears plane » di un piano di André sopra lo stesso quasicorpo ([1], pp. 136).

(2) Proprietà nota anche come assioma di Pasch.

*Dimostrazione.* Si assuma ABC come triangolo fondamentale delle coordinate  $(x_1, x_2, x_3)$  in P; disponendo ancora del punto unità, l'equazione di  $\Omega$  riducesi alla:

$$(1) \quad f(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0.$$

Allora le coordinate dei punti  $A^*, B^*, C^*$  sono ordinatamente del tipo  $(0, 1, -a)$ ,  $(-b, 0, 1)$ ,  $(1, -x, 0)$  con  $abc \neq 0$  e la condizione di allineamento di tali punti è:

$$(2) \quad abc = 1.$$

D'altro canto, in virtù di un teorema di B. Segre ([12], ultimo teorema del n. 6),  $A^*$  risulta esterno o interno a  $\Omega$  secondoché  $-f(A^*) = a$  è o no un quadrato, e del pari per  $B^*$  e  $C^*$ . Il Teorema 1 segue così senz'altro da (2).

Indichi ora A un piano affine d'ordine  $q^2$ , con  $q$  dispari sopra GF( $q^2$ ) = K. Poiché K ha un sottocampo L d'ordine  $q$ , A contiene un sottopiano di Baer, costruito sopra L, che verrà indicato con B. Denoteremo con  $\Gamma$  l'insieme delle coniche, aventi equazione del tipo  $x^2 - \tau y^2 = s$ , con  $s \in K$ ,  $s$  non quadrato, e  $\tau \in L$ .

**TEOREMA 2.** *I punti impropri di B, non appartenenti ad una conica  $\Omega$  di  $\Gamma$ , risultano interni rispetto ad essa.*

*Dimostrazione.* Nessuna retta parallela all'asse  $y$  può essere tangente ad  $\Omega$ , poiché l'equazione  $(1 - \tau)y^2 + s = 0$  non ammette soluzioni in K. Ogni altra retta ha equazione del tipo  $y = mx + b$  ( $m \in L$ ,  $b \in K$ ). Per conseguenza essa risulta tangente - ma non asintoto - di  $\Omega$  se e soltanto se:

$$(3) \quad x^2 - \tau(mx + b)^2 - s = x^2(1 - \tau m^2) - 2mb\tau x - b^2 = 0$$

ha una sola soluzione. Però, tenendo conto del fatto che sia  $1 - \tau m^2$ , sia  $-1$  sono elementi quadrati, mentre  $s$  non è quadrato in K, il discriminante di (3):  $(b^2 + s(1 - \tau m^2))$  risulta sempre diverso da 0. Resta così provato per assurdo l'asserto.

2. Osserviamo anzitutto che da un teorema di Ostrom ([7], [1], p. 224) si ricava in particolare che, conservando le notazioni introdotte alla fine del n. 1, i punti impropri di B costituiscono un insieme di derivazione X, relativo ad A.

Osserviamo poi che in un piano affine  $\delta S$ , ottenuto da un piano S mediante derivazione, affinché tre punti A, B, C non allineati in S risultino allineati in  $\delta S$  occorre e basta che i punti impropri delle rette AB, BC, CA appartengano all'insieme di derivazione ([1], pp. 223, [4], pp. 239-248).

Applicando l'ultima osservazione ed i Teoremi 1 e 2, si deduce che i punti propri di una conica  $\Omega$  di  $\Gamma$  continuano ad essere a tre a tre non allineati anche in  $\delta A$  - piano derivato di A mediante X. Infatti, se tutti i lati di un triangolo inscritto in  $\Omega$  avessero intersezione con X, la retta impropria di A conterrebbe tre punti interni ad una conica e giacenti sui lati di un triangolo inscritto in essa, in contraddizione col Teorema 1.

Sappiamo inoltre che  $A$  e  $\delta A$  hanno lo stesso gruppo di traslazione ([1], pp. 224). Ne segue senz'altro l'esistenza di due punti impropri di  $\delta A$  – dicansi essi  $U$  e  $V$  – tali che l'insieme

$$\Omega^* = \Omega \cup U \cup V \quad (\Omega \in \Gamma)$$

risulta un'ovale nel piano proiettivo corrispondente a  $\delta A$ . Così abbiamo stabilito che

**TEOREMA 3.** *Nei piani ottenibili dai piani di Galois mediante derivazione esistono sempre delle ovali.*

Poiché ogni piano di Hall è ottenibile da un piano di Galois mediante derivazione ([1], pp. 234), ne discende il risultato desiderato.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] P. DEMBOWSKI, *Finite Geometries*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 44, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1968.
- [2] D. R. HUGHES, *A class of non-desarguesian projective planes*, «Canad. J. Math.», 9, 378–388 (1957).
- [3] R. H. F. DENNISTON, *On arcs in projective planes of order 9*, «Manuscripta Math.», 4, 61–89 (1971).
- [4] F. KÁRTESZI, *Bevezetés a véges geometriákba*, Akadémiai Kiadó, Budapest (1972).
- [5] G. KORCHMÁROS, *Ovali nei piani finiti di Moulton*, Convegno Internazionale sulle Teorie Combinatorie, Roma 1973.
- [6] H. LÜNEBURG, *Über projektive Ebenen in denen jede Fahne von einer nichttrivialen Elation invariant gelassen wird*, «Abh. Hamburg», 29, 37–76 (1965).
- [7] T. G. OSTROM, *Semi translation planes*, «Trans. Amer. Math. Soc.», *III*, 1–18 (1964).
- [8] G. RODRIGUEZ, *Un esempio di ovale che non è una quasi-conica*, «Boll. UMI» (III) *14*, 500–503 (1959).
- [9] L. A. ROSATI, *Insiemi di sostituzione strettamente 3-transitivi e ovali*, «Boll. UMI», ser. IV, 4, 463–467 (1971).
- [10] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, «Canad. J. Math.», 7, 414–416 (1955).
- [11] B. SEGRE, *Ovali e curve – nei piani di Galois di caratteristica due*, «Rend. Accad. Naz. Lincei», 32, 785–790 (1962).
- [12] B. SEGRE, *Proprietà elementari relative ai segmenti ed alle coniche sopra un campo qualsiasi ed una congettura di Seppo Ilkka per il caso dei campi di Galois*, «Annali di Mat. Pura e Appl.», (IV) 96, 289–337 (1973).
- [13] A. WAGNER, *On perspectivities of finite projective planes*, «Math. Zeit.», 71, 113–123 (1959).