
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ROLF REISSIG

Über einen allgemeinen Typ erzwungener nichtlinearer Schwingungen zweiter Ordnung

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 56 (1974), n.3, p. 297–302.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_3_297_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni differenziali non lineari. — *Über einen allgemeinen Typ erzwungener nichtlinearer Schwingungen zweiter Ordnung.* Nota di ROLF REISSIG, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — È noto che l'equazione di Liénard generalizzata con perturbazione periodica nel caso di una forza di richiamo debolmente non lineare ammette almeno un'oscillazione forzata. La presente Nota contiene la dimostrazione dell'esistenza di tale oscillazione nel caso generale di una non linearità arbitraria il grafico della quale giace nell'angolo delimitato dalla retta di risonanza.

Für die verallgemeinerte Liénardsche Differentialgleichung

$$(1) \quad x'' + f(x)x' + g(x) = e(t) \equiv e(t+T), \quad \frac{2\pi}{T} = \omega$$

haben Lazer [1] ($f(x) = c$) und Mawhin [2] ($f(x)$ beliebig) gezeigt, dass unter den Bedingungen

$$xg(x) \geq 0 \quad (|x| \geq X), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 0, \quad \int_0^T e(t) dt = 0$$

wenigstens eine T -periodische Lösung existiert. Man sollte dies aber auch dann erwarten, wenn die nichtlineare Rückstell-Charakteristik in dem Winkelraum zwischen den linearen Begrenzungen $g(x) \equiv 0$ und $g(x) \equiv \omega^2 x$ liegt, ohne von der Erregerkraft $e(t)$ den Mittelwert 0 zu fordern. Die Bestätigung erhält man durch den folgenden Satz:

In der Differentialgleichung (1) seien die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $e(t) \equiv e(t+T)$ für alle Werte ihrer Argumente definiert und stetig. Ferner gelte

$$(2) \quad 0 < \liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} \leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} < \omega^2.$$

Dann ist wenigstens eine T -periodische Lösung vorhanden.

Zum Beweis bemerkt man erst einmal, dass mit zwei konstanten Werten h und k ($0 < h \leq k < \omega^2$) für $|x| \geq X$ (hinreichend gross) die Abschätzung besteht:

$$(3) \quad h \leq \frac{g(x)}{x} \leq k.$$

Setzt man nun

$$\gamma(x) = \begin{cases} kx - g(x), & |x| \geq X \\ \left[k - \frac{g(X \operatorname{sgn} x)}{X \operatorname{sgn} x} \right] x, & |x| \leq X \end{cases}$$

(*) Nella seduta del 9 marzo 1974.

und

$$\rho(x) = kx - g(x) - \gamma(x),$$

so gilt

$$0 \leq \frac{\gamma(x)}{x} \leq k - h(x \neq 0)$$

und

$$\rho(x) = 0 \quad \text{für } |x| \geq X, \quad \text{also } |\rho(x)| \leq P \quad \text{für alle } x.$$

Mit einem Parameter μ ($0 \leq \mu \leq 1$) bildet man die Vergleichsdifferentialgleichung

$$(4) \quad x'' + kx = \mu \{e(t) + \gamma(x) + \rho(x) - f(x)x'\},$$

die für $\mu = 0$ nur die triviale T -periodische Lösung hat und für $\mu = 1$ in die ursprüngliche Gleichung (1) übergeht. Die T -periodischen Lösungen von (4) lassen sich bekanntlich in der Form

$$(5) \quad x(t) = \mu U\{x(t)\}$$

darstellen, wobei der Operator U einen gewissen Banach-Raum B vollstetig in sich selbst abbildet. Dabei ist B der lineare Raum aller über dem Intervall $[0, T]$ stetigen Funktionen $x(t)$ mit der Randbedingung $x(0) = x(T)$, versehen mit der Norm

$$\|x(t)\| = \max_{[0, T]} |x(t)|.$$

Nach dem Fixpunktsatz von Leray-Schauder besitzt die Gleichung (5) für jeden Wert $\mu \in [0, 1]$ wenigstens eine Lösung in B , sofern alle möglicherweise vorhandenen Lösungen a priori beschränkt sind, und zwar gleichmässig hinsichtlich des Parameters μ . Um diese a priori-Beschränktheit aufzuzeigen, werden zwei Hilfsätze über oszillatorische Lösungen benötigt.

HILFSSATZ 1. *Es sei $x(t)$ eine Lösung von (4) über dem Intervall $[a, b]$, und es gelte*

$$x(a) = x(b) = 0,$$

$$0 < b - a \leq \frac{T}{2}.$$

Dann bestehen mit zwei System-Konstanten K_0, K_1 Abschätzungen der Art

$$(6) \quad |x(t)| \leq K_0, \quad |x'(t)| \leq K_1 \quad \text{für } a \leq t \leq b.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $a = 0$ sei, und setzen $b = T_0 \leq \frac{T}{2}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

Im Sinne der Konvergenz im quadratischen Mittel gelten die Darstellungen

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\omega_0 t}{2}, \quad x'(t) = \frac{\omega_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \cos \frac{n\omega_0 t}{2},$$

und über die Parsevalsche Gleichung findet man, dass

$$(7) \quad \|x\|^2 \leq \frac{4}{\omega_0^2} \|x'\|^2, \quad \|\cdot\|^2 = \int_0^{T_0} (\cdot(t))^2 dt.$$

Man schätzt nun nacheinander $\|x\|$ und $\|x'\|$ ab und multipliziert dazu Gleichung (4) mit $x(t)$ und integriert von 0 bis T_0 :

$$-\|x'\|^2 + k\|x\|^2 = \mu \int_0^{T_0} x(t) \{e(t) + \gamma(x(t)) + \rho(x(t))\} dt,$$

da

$$(8) \quad \int_0^{T_0} (x'(t)x(t))' dt = \int_0^{T_0} \left(\int_0^{x(t)} f(s) ds \right)' dt = 0.$$

Mit $E = \max_{[0, T]} |e(t)|$ erhält man hieraus:

$$(9) \quad \|x'\|^2 \leq k\|x\|^2 + (E + P) \sqrt{T_0} \|x\|.$$

Unter Berücksichtigung von (7) schliesst man weiter:

$$(\omega^2 - k)\|x\| \leq \left(\frac{\omega_0^2}{4} - k \right) \|x\| \leq (E + P) \sqrt{\frac{T}{2}}, \text{ d.h. } \|x\| \leq \bar{K}_0$$

und somit gemäss (9)

$$\|x'\|^2 < 2k\|x\|^2 + (2k)^{-1}(E + P)^2 T_0, \quad \|x'\| \leq \bar{K}_1.$$

Dabei sind $\bar{K}_0$ und $\bar{K}_1$ von T und k abhängige System-Konstanten. Nun folgt unmittelbar

$$|x(t)| = \left| \int_0^t x'(s) ds \right| \leq \|x'\| \sqrt{T_0} \leq K_0$$

und (wegen $x'(\tau) = 0$ für ein $\tau \in (0, T_0)$)

$$|x'(t)| = \left| \int_\tau^t x''(s) ds \right| \leq (kK_0 + E + \Gamma_0 + P) T_0 + 2F_0 \leq K_1$$

$$\left[\Gamma_0 = \max_{|x| \leq K_0} |\gamma(x)|, \quad F_0 = \max_{|x| \leq K_0} \left| \int_0^x f(s) ds \right| \right].$$

HILFSSATZ 2. Es sei $x(t)$ eine Lösung von (4) über dem Intervall $[a, b]$, und es gelte:

$$0 < \theta \leq b - a \leq T$$

$$x(t) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \text{für} \quad a \leq t \leq b$$

sowie

$$a) \quad x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b)$$

oder

$$b) \quad x(a) = x(b) = 0, \quad |x'(a) - x'(b)| \leq \sigma.$$

Dann gibt es (von θ und im Fall b) auch von σ abhängige) System-Konstanten L_0 und L_1 derart, dass

$$(10) \quad |x(t)| \leq L_0, \quad |x'(t)| \leq L_1 \quad \text{für } a \leq t \leq b.$$

Wir setzen wieder o.B.d.A. voraus, dass $a = 0$ sei, und schreiben $b = T_0$, wobei diesmal $\theta \leq T_0 \leq T$.

Im Sinne der Mittelkonvergenz gelten die Fourier-Darstellungen

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)),$$

$$x'(t) = \omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} n (b_n \cos(n\omega_0 t) - a_n \sin(n\omega_0 t)).$$

Aus ihnen ergibt sich über die Parsevalsche Gleichung:

$$(11) \quad \|x\|^2 \leq T_0^{-1} \left(\int_0^{T_0} x(t) dt \right)^2 + \frac{1}{\omega_0^2} \|x'\|^2.$$

Integration von (4) zwischen den Grenzen 0 und T_0 liefert:

$$[x'(T_0) - x'(0)] + \int_0^{T_0} \{kx(t) - \mu\gamma(x(t))\} dt = \mu \int_0^{T_0} \{e(t) + \rho(x(t))\} dt.$$

Beachtet man, dass für $x \neq 0$

$$h \leq (1 - \mu)k + \mu h \leq k - \mu \frac{\gamma(x)}{x},$$

so gelangt man zu der Abschätzung

$$(12) \quad h \left| \int_0^{T_0} x(t) dt \right| = h \int_0^{T_0} |x(t)| dt \leq \sigma + (E + P) T_0,$$

in der man im Fall der Voraussetzung a) $\sigma = 0$ zu setzen hat. Offenbar wird für ein $\tau \in (0, T_0)$

$$(13) \quad |x(\tau)| = T_0^{-1} \left| \int_0^{T_0} x(t) dt \right| \leq \frac{\sigma + (E + P) T}{h T_0}.$$

Sodann wendet man die Beziehung (9) an, die wegen

$$x(0) = x(T_0), \quad x(0)x'(0) = x(T_0)x'(T_0)$$

erhalten bleibt, und leitet daraus mittels (11) und (12) her, dass

$$\omega^2 \|x\|^2 \leq \omega_0^2 \|x\|^2 \leq \omega_0^2 T_0^{-1} h^{-2} (\sigma + (E+P)T)^2 + k \|x\|^2 + (E+P) \sqrt{T_0} \|x\|,$$

$$(\omega^2 - k) \|x\|^2 \leq \frac{4\pi^2}{\theta^3} \left(\frac{\sigma + (E+P)T}{h} \right)^2 + (E+P) \sqrt{T} \|x\|,$$

also $\|x\| \leq \bar{L}_0(\theta, \sigma)$.

Durch nochmalige Anwendung von (9) folgt sofort

$$\|x'\| \leq \bar{L}_1(\theta, \sigma).$$

Die weitere Überlegung geht wie bei Hilfssatz 1. vor sich, allerdings muss man jetzt

$$x(t) = x(\tau) + \int_{\tau}^t x'(s) ds$$

setzen und (13) berücksichtigen.

Nun befassen wir uns mit einer T -periodischen Lösung $x(t)$ von (4) und unterscheiden folgende Möglichkeiten.

1. $x(t) \geq 0$ (≤ 0) FÜR ALLE t

Mit $a=0$, $b=T$ ($\theta=T$) liefert der Hilfssatz 2. (Voraussetzung vom Typ a) sogleich von μ unabhängige a priori-Schranken für $x(t)$ und $x'(t)$.

2. $x(t)$ IST POSITIVER WIE AUCH NEGATIVER WERTE FÄHIG

Dann existieren im Intervall $[0, T]$ mindestens 3 Nullstellen, und man kann o.B.d.A. $x(0) = x(T) = 0$ annehmen. Man definiert

$$d = \sup \{b - a \mid 0 \leq a < b \leq T, \quad x(a) = x(b) = 0, \quad x(t) \neq 0 \text{ über } (a, b)\}.$$

(i) $d \leq T/2$.

Dann lässt sich das Periodenintervall $[0, T]$ in höchstens drei Teilintervalle mit Längen $\leq T/2$ zerlegen, in deren Endpunkten die betrachtete Lösung verschwindet. Auf jedes Teilintervall ist Hilfssatz 1. anwendbar und liefert insgesamt die gewünschte a priori-Abschätzung.

(ii) $T/2 < d < T$.

Dann gibt es ein Teilintervall $[a, b] \subset [0, T]$ mit $x(a) = x(b) = 0$, $x(t) \neq 0$ über (a, b) und $b - a > T/2$. Man kann o.B.d.A. voraussetzen, dass $b < T$, d.h. $0 \leq a < T/2 < b < T$.

Auf die Intervalle $[b - T, a]$ und $[b, T]$ lässt sich wegen $a - (b - T) = T - (b - a) < T/2$ Hilfssatz 1. anwenden; dieser ergibt insbesondere

$$|x'(a) - x'(b)| \leq \sigma = 2K_1.$$

Anschliessend wird Hilfssatz 2. ($\theta = T/2$, Voraussetzung vom Typ b) auf das Intervall $[a, b]$ angewendet.

Insgesamt folgt wieder die a priori-Abschätzung.

LITERATUR

- [1] A. C. LAZER, *On Schauder's fixed point theorem and forced second-order nonlinear oscillations*, « J. Math. Analysis Appl. », 21, 421-425 (1968).
- [2] J. MAWHIN, *An extension of a theorem of A. C. Lazer on forced nonlinear oscillations*, « J. Math. Analysis Appl. », 40, 20-29 (1972).
- [3] R. REISSIG, *Extension of some results concerning the generalized Liénard equation*.
Erscheint in: « Ann. Mat. Pura Appl. ».