Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franco Ghione

Una formula di riduzione per la serie di Betti-Poincaré in anelli locali intersezione completta

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.3, p. 286–292.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_3_286_0>

Algebra. — *Una formula di riduzione per la serie di Betti-Poincaré in anelli locali intersezione completa* (*). Nota di FRANCO GHIONE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

RÉSUMÉ. — On démontre la rationalité de la série de Betti-Poincaré, dans le cas d'anneaux du type $R/y^2 R$, où $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local intersection compléte et y un élement dans $\mathfrak{m}$ tel que $\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y^2)$.

INTRODUZIONE

Denotiamo con $(R, \mathfrak{m})$ un anello locale e con $k = R/\mathfrak{m}$ il suo campo residuo. Se M è un R-modulo di tipo finito, si consideri la serie formale di potenze

$$P_R(M) = \sum_{p=0}^{\infty} \dim_k (\mathrm{Tor}_p^R(M, k))\, t^p .$$

Devesi a Serre e Kaplanski la congettura che la serie Betti-Poincaré $P_R(k)$ sia una funzione razionale per ogni anello locale R. Questa congettura è stata dimostrata in alcuni casi particolari: anelli regolari [5], intersezioni complete [7], anelli di Görenstein di dimensione di immersione 3 [8], e altri ancora [6].

In questa Nota il risultato principale è la dimostrazione della razionalità della serie di Betti-Poincaré per un anello locale del tipo $R/y^2 R$, dove R è un anello intersezione completa e y un elemento nel massimale di R tale che $\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y^2)$.

Si dà in ultimo un esempio di particolare interesse legato alla « rappresentazione primbasis » di un ideale.

Per i fini suddetti si utilizzano le operazioni di Massey definite per algebre graduate, differenziali e quasi commutative. Queste tecniche sono state impiegate in algebra omologica locale, per la prima volta da Golod [1], poi da Shamash [6] e da Gulliksen [2] a cui noi ci riferiremo in particolare.

1. OPERAZIONI DI MASSEY SU DI UNA R-ALGEBRA

Il termine « R-algebra » è inteso nel senso di Tate [7], designa cioè un'algebra associativa su R graduata, quasi commutativa e differenziale. Nello stesso modo, i morfismi di R-algebre, andranno intesi nel senso di Tate.

(*) Il presente lavoro è stato redatto mentre l'Autore fruiva di una borsa di studio del Centro Linceo Interdisciplinare di Scienze matematiche e loro Applicazioni.

(**) Nella seduta del 9 marzo 1974.

Per R–algebra aumentata, intenderemo una R–algebra F con una aumentazione suriettiva $F \to k$. $\tilde{Z}(F)$ indicherà allora il nucleo del morfismo indotto $Z(F) \to k$, e $\tilde{H}(F)$ indicherà analogamente il nucleo del morfismo indotto $H(F) \to k$.

Sia F una R–algebra. Definiamo induttivamente delle operazioni ennarie γ sui cicli di F chiamate operazioni di Massey.

Per $n = 1$. Sia z un ciclo omogeneo di F, definiamo allora

$$\gamma(z) = z .$$

Per $n = 2$. Siano z_1, z_2 cicli omogenei di F di gradi r_1, r_2, rispettivamente. Consideriamo il ciclo

$$y(z_1, z_2) = (-1)^{r_1+1} z_1 z_2 .$$

Se $y(z_1, z_2)$ è un bordo, definiamo $\gamma(z_1, z_2)$ come un arbitrario elemento di grado $r_1 + r_2 + 1$ tale che

$$d\gamma(z_1, z_2) = y(z_1, z_2) .$$

Se $y(z_1, z_2)$ non è un bordo, diciamo che $\gamma(z_1, z_2)$ non è definito.

Per $n = 3$. Siano z_1, z_2, z_3 tre cicli omogenei di F di gradi r_1, r_2, r_3, rispettivamente. Supponiamo che sia definito $\gamma(z_1, z_2)$ e $\gamma(z_2, z_3)$. Consideriamo il ciclo

$$y(z_1, z_2, z_3) = (-1)^{r_1+1} \gamma(z_1)\gamma(z_2, z_3) + (-1)^{r_1+r_2+2} \gamma(z_1, z_2)\gamma(z_3) .$$

Se $y(z_1, z_2, z_3)$ è un bordo, definiamo $\gamma(z_1, z_2, z_3)$ come un arbitrario elemento di F di grado $r_1 + r_2 + r_3 + 2$ tale che

$$d\gamma(z_1, z_2, z_3) = y(z_1, z_2, z_3) .$$

Se $y(z_1, z_2, z_3)$ non è un bordo, diciamo che $\gamma(z_1, z_2, z_3)$ non è definito.

In generale si procede *induttivamente*. Siano $z_1, z_2, \cdots, z_n$ n cicli omogenei di F di gradi $r_1, r_2, \cdots, r_n$ rispettivamente. Supponiamo che le $\gamma(z_{i_1}, \cdots, z_{i_p})$ siano definite per ogni sottoinsieme proprio $\{i_1, \cdots, i_p\}$ di $\{1, 2, \cdots, n\}$. Possiamo allora considerare il ciclo

$$y(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{[1,i]} \gamma(z_1, \cdots, z_i)\gamma(z_{i+1}, \cdots, z_n)$$

dove $[1, i] = r_1 + r_2 + \cdots + r_i + i$. Se $y(z_1, \cdots, z_n)$ è un bordo, definiamo $\gamma(z_1 \cdots, z_n)$ come un arbitrario elemento di F di grado $r_1 + \cdots + r_n + n - 1$ tale che

$$d\gamma(z_1, \cdots, z_n) = y(z_1, \cdots, z_n) .$$

Se $y(z_1, \cdots, z_n)$ non è un bordo, diciamo che $\gamma(z_1, \cdots, z_n)$ non è definito.

OSSERVAZIONE I. Se $\gamma(z_1, \cdots, z_n)$ è definito e se z è un bordo, allora anche $\gamma(z, z_1, \cdots, z_n)$ è definito.

OSSERVAZIONE II. Se z e z' sono due cicli omologhi, allora $\gamma(z, z_1, \cdots, z_n)$ è definito se e solo se $\gamma(z', z_1, \cdots, z_n)$ è definito.

OSSERVAZIONE III. Se z e z' sono cicli omogenei dello stesso grado e se $\gamma(z, z_1, \cdots, z_n)$ e $\gamma(z', z_1, \cdots, z_n)$ sono definiti, allora è definito anche $\gamma(z + z', z_1, \cdots, z_n)$ e $\gamma(rz, z_1, \cdots, z_n)$ per ogni $r \in \mathrm{R}$.

DEFINIZIONE. Diciamo che la R–algebra F ha le operazioni di Massey banali se, per ogni intero positivo n e per ogni n–upla $z_1, z_2, \cdots, z_n$ di cicli omogenei di F, $\gamma(z_1, \cdots, z_n)$ è definito.

PROPOSIZIONE 1. *Sia* F *una* R*–algebra.* F *ha le operazioni di Massey banali se e soltanto se esiste un sistema* $\mathrm{S} = \{z_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ *di cicli omogenei di* F *tali che:*

a) *le classi di omologia* $\{cl(z_i)\}_{i \in \mathrm{I}}$ *generano* H (F) *come* R*–modulo*;

b) *le operazioni di Massey sono definite per ogni sistema finito di elementi di* S.

Questa proposizione è una conseguenza immediata delle precedenti osservazioni.

Un insieme di cicli omogenei S che verifica la condizione (a) sarà chiamato un insieme di cicli rappresentante (per H (F)).

Le considerazioni fatte si estendono immediatamente al caso di R–algebre aumentate, prendendo i cicli dell'ideale di aumentazione $\tilde{\mathrm{Z}}(\mathrm{F})$. In questo caso S sarà chiamato un insieme di cicli rappresentante per $\tilde{\mathrm{H}}(\mathrm{F})$.

Le operazioni di Massey, introdotte da Massey [4] in topologia algebrica, hanno importanza in algebra omologica locale per un teorema dovuto a Golod [1] che ora citiamo sulla forma più generale considerata da Gulliksen.

Sia F una R–algebra aumentata formata da R–moduli liberi. Sia $\mathrm{N} = \bigoplus_{p \geq 1} \mathrm{N}_p$ un R–modulo libero graduato tale che ciascuna componente N_p sia libera e di rango uguale alla $\dim_k \tilde{\mathrm{H}}_{p-1}(\mathrm{F}) \otimes_{\mathrm{R}} k$. Sia infine T (N) l'algebra graduata tensoriale su N. Con queste notazioni, sussiste il seguente:

TEOREMA 2. *Sia* F *una* R*–algebra aumentata, formata da* R*–moduli liberi e con operazioni di Massey banali. Allora l'*R*–modulo graduato* $\mathrm{X} = \mathrm{F} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{T}(\mathrm{N})$ *ammette un differenziale che estende il differenziale di* F. *In questo modo,* X *risulta una risoluzione libera di* k *con* R*–moduli. Inoltre, se* F *è minimale* $(\mathrm{B}(\mathrm{F}) \subset \mathfrak{m}\mathrm{F})$ *e se* $\mathrm{Im}\,\gamma \subset \mathfrak{m}\mathrm{F}$, *allora* X *è una risoluzione minimale di* k.

Per la dimostrazione, ved. [2].

Il caso considerato da Golod è quello in cui $\mathrm{F} = \mathrm{R}\langle \mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_n ; d\mathrm{T}_i = t_i \rangle$ è il complesso di Koszul su un sistema $t_1, \cdots, t_n$ di generatori minimali di $\mathfrak{m}$. Si dice allora che R è un anello di Golod se il complesso di Koszul considerato F ha operazioni di Massey banali.

Esempi di anelli di Golod sono: l'anello

$$k[X_1, \cdots, X_n]/(X_1, \cdots, X_n)^d \qquad \text{(vedi [1])}$$

e anche l'anello

$$k[[X_1, \cdots, X_n]]/(F_1 F_2)$$

se (F_1, F_2) è contenuto nel quadrato del massimale e F_1, F_2, non formano una successione regolare (vedi [6]).

Per gli anelli di Golod si può calcolare la serie di Betti–Poincaré. Infatti, sia R un anello di Golod ed F il complesso di Koszul considerato precedentemente. $X = F \otimes_R T(N)$ risulterà allora una risoluzione minimale di k con R–moduli liberi. N è l'R–modulo graduato dato da

$$N = N_2 \otimes N_3 \otimes \cdots \otimes N_{n+1},$$

dove N_p è un R–modulo libero di rango $c_{p-1} = \dim_k \tilde{H}_{p-1}(F)$.

Indicando con $\chi(\ )$ la serie di Poincaré di un modulo graduato, cioè la serie formale di potenze

$$\chi(\ ) = \sum_{p=0}^{\infty} rg((\ )_p)\, t^p,$$

si ha allora

$$P_R(k) = \chi(F)\cdot\chi(T(N)) = (1+t)^n/[1-\chi(N)]$$

e in definitiva

$$P_R(k) = (1+t)^n/[1 - c_1 t^2 - c_2 t^3 - \cdots - c_n t^{n+1}],$$

dove $n = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, $c_p = \dim_k \tilde{H}_p(F)$ e F è il complesso di Koszul su di un insieme minimale di generatori di $\mathfrak{m}$.

L'avere una R–algebra operazioni di Massey banali, è un invariante nel senso precisato dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3. *Siano* F *e* F′ *due* R*–algebre aumentate e sia* $\varphi: F \to F'$ *un morfismo di* R*–algebre tale che* $\varphi_*: \tilde{H}(F) \to \tilde{H}(F')$ *sia un isomorfismo. Allora* F *ha operazioni di Massey banali se e solo se* F′ *ha operazioni di Massey banali.*

Dimostrazione. Se F ha operazioni di Massey banali, allora è immediato vedere che anche F′ ha operazioni di Massey banali. Viceversa, supponiamo che F′ abbia operazioni di Massey banali e facciamo vedere che esistono insiemi di cicli rappresentanti

$$S = \{z_i\}_{i\in I} \quad , \quad S' = \{z'_i\}_{i\in I}$$

rispettivamente per $\tilde{H}(F)$ e $\tilde{H}(F')$, tali che $\gamma(z_1, \cdots, z_n)$ e $\gamma(z'_1, \cdots, z'_n)$ possono essere definiti in modo che sia

$$\varphi\gamma(z_1, \cdots, z_n) = \gamma(z'_1, \cdots, z'_n)$$

All'uopo procediamo per induzione su n.

Fissiamo un insieme di cicli rappresentante $S = \{z_i\}_{i \in I}$ per $\tilde{\mathrm{H}}(\mathrm{F})$; poniamo $z'_i = \varphi(z_i)$. Per l'ipotesi fatta su φ_* sarà allora $S' = \{z'_i\}_{i \in I}$ un insieme di cicli rappresentanti per $\tilde{\mathrm{H}}(\mathrm{F}')$. Essendo ora $\gamma(z) = z$, la proposizione risulta dimostrata per $n = 1$.

Induttivamente, sia

$$y(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{[1,i]} \gamma(z_1, \cdots, z_i) \gamma(z_{i+1}, \cdots, z_n) ;$$

applicando la φ si trova, per l'ipotesi induttiva:

$$\varphi y(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{[1,i]} \gamma(z'_1, \cdots, z'_i) \gamma(z'_{i+1}, \cdots, z'_n)$$

e questo è un bordo essendo le operazioni di Massey banali in F'. Poniamo allora $\varphi y(z_1, \cdots, z_n) = d\bar{\gamma}(z'_1, \cdots, z'_n)$. Si ha

$$\varphi_*(\mathrm{cl}(y(z_1, \cdots, z_n))) = 0$$

talché, essendo φ_* un isomorfismo, $y(z_1, \cdots, z_n)$ risulterà pure un bordo. Sia quindi $y(z_1, \cdots, z_n) = d\bar{\gamma}(z_1, \cdots, z_n)$, onde $\bar{\gamma}(z'_1, \cdots, z'_n) - \varphi\bar{\gamma}(z_1, \cdots, z_n)$ è un ciclo in F'. Esisterà allora un ciclo in F, sia esso s, e un bordo in F', sia esso ds' tali che

$$\varphi(s) = \bar{\gamma}(z'_1, \cdots, z'_n) - \varphi\bar{\gamma}(z_1, \cdots, z_n) + ds' .$$

Posto in ultimo

$$\gamma(z'_1, \cdots, z'_n) = \bar{\gamma}(z'_1, \cdots, z'_n) + ds' \quad , \quad \gamma(z_1, \cdots, z_n) = \bar{\gamma}(z_1, \cdots, z_n) + s$$

ne consegue l'asserto.

2. Una formula di riduzione per la serie di Betti–Poincaré

PROPOSIZIONE 4. *Sia* $(\mathrm{R}, \mathfrak{m})$ *un anello locale e* $y \in \mathfrak{m}$ *un elemento tale che* $\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y^2)$. *Si ha allora che*

$$\mathrm{Tor}_p^{\mathrm{R}}(k, \mathrm{R}/y\mathrm{R}) \cong \mathrm{Tor}_p^{\mathrm{R}}(k, \mathrm{R}/y^t \mathrm{R})$$

per ogni $p \geq 0$ *e per ogni intero* $t \geq 1$.

Dimostrazione. Poichè $\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y^2)$, si ha per ogni intero $t \geq 1$ $\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y^t)$. Consideriamo ora le successioni esatte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ann}(y^t) \longrightarrow \mathrm{R} \xrightarrow{y^t} \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}/y^t \mathrm{R} \longrightarrow 0 .$$

Otteniamo

$$\mathrm{Tor}_p^R(k, R/yR) \cong \mathrm{Tor}_{p-2}^R(k, \mathrm{Ann}(y)) = \mathrm{Tor}_{p-2}^R(k, \mathrm{Ann}(y^t)) \cong \mathrm{Tor}_p^R(k, R/y^t R)$$

per ogni $p \geq 2$. Essendo $\mathrm{Ann}(y) \subset \mathfrak{m}$ (il caso $\mathrm{Ann}(y) = R$ è banale) e $y \in \mathfrak{m}$, si ha $\mathrm{Tor}_1^R(k, R/yR) \cong k \cong \mathrm{Tor}_1^R(k, R/y^t R)$. Per Tor_0 non ci sono difficoltà.

TEOREMA 5. *Sia* $(R, \mathfrak{m})$ *un anello locale e* $y \in \mathfrak{m}$ *un elemento tale che* $\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y^2)$. *Si ha allora che*

$$P_{R/y^2R}(k) = P_R(k)/[1 - t(P_R(R/yR) - 1)] .$$

Dimostrazione. Sia F una R–algebra che sia una risoluzione di k con R–moduli liberi. Vogliamo mostrare che $F' = F/y^2 F$ ha operazioni di Massey banali. Sia z' un ciclo omogeneo di grado positivo di F' e sia z un elemento di F la cui immagine in F' sia z'. Sarà allora $dz = y^2 x$ e quindi $y^2 dx = 0$ da cui $y\, dx = 0$ essendo $\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y^2)$. Sia Y un elemento di F tale che $dY = y$. Si ottiene allora $\mathrm{cl}(z') = \mathrm{cl}(yY'x')$ dove Y' e x' indicano le classi di Y e x in F'. Posso allora trovare un insieme S di cicli rappresentanti per $\tilde{H}(F')$, della forma $S = \{z'_i = yY'x'_i\}_{i\in I}$. Le operazioni di Massey in F' sono allora banali poichè $(Y')^2 = 0$ essendo Y' un elemento di grado uno. Precisamente possiamo definire

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\gamma(z'_1, \cdots, z'_n) = 0 && \text{per } n \geq 2 \\ &\gamma(z') = z' && \text{per } n = 1 . \end{aligned}$$

Per il Teorema 2 allora $X = F' \otimes T(N)$ è una risoluzione di k con R'–moduli liberi, dove con R' indichiamo l'anello $R' = R/y^2R$. N sarà un R'–modulo libero e graduato tale che

$$rg(N_p) = \dim_k \tilde{H}_{p-1}(F') = \dim_k \tilde{H}_{p-1}(F \otimes R') = \dim_k \mathrm{Tor}_{p-1}^R(k, R')$$

per $p \geq 2$, e $N_p = 0$ per $p \leq 1$.

Le (1), poichè $y \in \mathfrak{m}$, ci assicurano anche la minimalità della risoluzione X. Applicando allora la Prop. 4, si ha la formula cercata.

COROLLARIO 6. *Sia* $(R, \mathfrak{m})$ *un anello locale intersezione completa,* $y \in \mathfrak{m}$ *un elemento tale che* $\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y^2)$, *poniamo* $R' = R/y^2R$, *allora* $P_{R'}(k)$ *è una funzione razionale. Di più risulta*

$$P_{R'}(k) = (1 + t)^{n-1}/[(1 - t^2)^m - t\,\alpha(t)]$$

dove $\alpha(t)$ *è un polinomio a coefficienti interi,* $n = \varepsilon_0(R)$ *e* $m = \varepsilon_1(R)$.

Dimostrazione. Essendo R un anello locale intersezione completa, possiamo supporre $R = A/(y_1, \cdots, y_m)$ dove A è un anello regolare di dimensione n e $y_1, \cdots, y_m$ è una successione regolare. Se ora M è un R–modulo di tipo finito, sappiamo che [3]

$$P_R(M) = \pi_M(t)/[(1 - t^2)^m]$$

dove $\pi_M(t)$ è un polinomio a coefficienti interi tale che

$$\pi_M(-1) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim_k \mathrm{Tor}_p^A(M, k) .$$

In particolare

$$P_R(R/yR) = \pi(t)/[(1-t^2)^m] \qquad \text{e} \qquad P_R(k) = (1+t)^n/[(1-t^2)^m],$$

applicando il Teorema 5 si trova

$$P_{R'}(k) = (1+t)^n/[(1-t^2)^m(1+t) - t\,\pi(t)] .$$

Poichè [5]

$$\pi(-1) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim_k \mathrm{Tor}_p^A(R/yR, k) = 0$$

si ottiene la formula voluta.

Esempio.

Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di un anello locale $(A, \mathfrak{m})$ e sia $\mathfrak{a}$ un ideale contenuto in $\mathfrak{p}$. Supponiamo che esista un elementc $y \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$ tale che

$$\mathfrak{a} : y = \mathfrak{p} .$$

Riesce allora $\mathfrak{a} : y = \mathfrak{a} : y^2$. Posto quindi $R = A/\mathfrak{a}$, il Teorema 5 è applicabile a questa situazione. In particolare se $\mathfrak{a}$ è un ideale generato da una successione regolare e A è un anello regolare, allora la serie di Betti–Poincaré dell'anello $A/(\mathfrak{a}, y^2)$ è una funzione razionale.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. S. GOLOD, *On the homology of some local rings*, « Soviet Math. », *3* (I), 745–748 (1962).
[2] T. H. GULLIKSEN, *Massey operations and the Poincaré series of certain local rings*, « Journal of Algebra », *22* (II), 223–232 (1972).
[3] T. H. GULLIKSEN, *A change of ring theorem with applications to Poincaré series and intersection multiplicity* (to appear).
[4] W. S. MASSEY, *Symp. Int. Topologia Algebrica*, Universidad Nacional Autonoma de México and UNESCO, México City, 1958.
[5] J. P. SERRE, *Algèbre locale et multiplicités*, Springer, Lecture Notes (1965).
[6] J. SHAMASH, *The Poincaré series of a local ring*, « Journal of Algebra », *12*, 453–470 (1969).
[7] J. TATE, *Homology of Noetherian rings and local rings*, « Illinois Journal Math. », *1*, 14–27 (1957).
[8] H. WIEBE, *Über homologische Invarianten lokaler ringe*, « Math. Annalen », *179*, 257–274 (1969).