Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Stella Mongiovi

Studio di una equazione lineare in una incognita operaioriale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.2, p. 209–219.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_2_209_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Fisica matematica. — *Studio di una equazione lineare in una incognita operatoriale.* Nota di MARIA STELLA MONGIOVÌ, presentata (*) dal Socio C. CATTANEO.

SUMMARY. — We solve the operator equations

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\,\mathrm{L}\,[x^{n-i}\,\varphi(x)] = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\,\mathrm{L}\,[x^{n-i}\,\varphi(x)] = \mathrm{A}\,[\varphi(x)]\,,$$

where the unknown is the linear operator L, and obtain the solutions in three equivalent forms: as infinite-order differential operators with variable coefficients, as «translation» operators and as integral operators.

INTRODUZIONE

La determinazione esplicita di alcune classi di equazioni di campo invarianti rispetto al gruppo delle trasformazioni di Lorentz – che fornisce, tra l'altro, un procedimento per la costruzione e l'analisi delle rappresentazioni dell'algebra di Lie del gruppo di Lorentz non omogeneo – può essere ricondotta alla risoluzione di equazioni del tipo:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\,\mathrm{L}\,[x^{n-i}\,\varphi(x)] = 0 \tag{1}$$

dove L indica un incognito operatore lineare definito in un insieme Φ di funzioni complesse $\varphi(x)$ della variabile reale x, ed i coefficienti $a_i(x)$ sono funzioni complesse assegnate [1]. L'applicazione di analoghi procedimenti allo studio delle equazioni invarianti rispetto ad un generico gruppo pseudortogonale ed alla determinazione del corrispondente gruppo non omogeneo, condurrebbe ancora a equazioni o a sistemi di equazioni del tipo (1).

In questa Nota ci occuperemo della risoluzione della equazione (1) – cioè della determinazione degli operatori L che, qualunque sia $\varphi(x)$, la rendono identicamente soddisfatta – e dell'equazione più generale:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\,\mathrm{L}\,[x^{n-i}\,\varphi(x)] = \mathrm{A}\,[\varphi(x)] \tag{1$_1$}$$

che da essa si desume aggiungendovi un operatore assegnato (termine noto) indipendente da L.

Successivamente determineremo l'insieme di definizione degli operatori L, soffermandoci sul caso, particolarmente interessante nelle applicazioni, in cui tali operatori sono definiti su un insieme di funzioni invariante e denso in L^2.

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1974.

(1) Cfr., V. CANTONI, «Symposia Mathematica», *12* (1973).

Supporremo, in un primo tempo, che ogni funzione $\varphi(x)$ dell'insieme Φ in cui si vuole che risultino definiti L ed A sia prolungabile come funzione analitica intera e che i coefficienti $a_i(x)$ siano funzioni continue, con $a_0(x) = 1$. Queste ipotesi verranno successivamente indebolite.

Osserviamo che, analogamente a quanto accade per le equazioni differenziali lineari, la conoscenza di un particolare operatore L_0, soluzione della equazione non omogenea (1_1) e di tutti gli operatori L, soluzioni della equazione omogenea (1), equivale alla conoscenza di tutte le soluzioni $L_0 + L$ della (1_1).

I. Studio della equazione omogenea

I. 1. *Rappresentazione delle soluzioni mediante operatori differenziali.*

Cerchiamo le soluzioni della (1) della forma

$$L = \mathfrak{L}(D, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) D^k \qquad \left(D^k = \frac{d^k}{dx^k}\right) \tag{2}$$

dove, per ogni valore di $x \in R$, la funzione di z

$$\mathfrak{L}(z, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) z^k$$

è una funzione intera di z supposta tale che la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \varphi^{(k)}(x)$$

risulti assolutamente convergente, qualunque sia la funzione $\varphi(x) \in \Phi$ (condizione effettivamente verificata, come si vedrà, dalle soluzioni cui perverremo).

La relazione

$$D^r x^\alpha = \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{r}{r-\alpha+j} \frac{\alpha!}{j!} x^j D^{r-\alpha+j},$$

da intendersi come relazione operatoriale (con le potenze di x operatori di moltiplicazione), comporta tenendo conto delle ipotesi fatte su L:

$$Lx = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) D^k x = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) [kD^{k-1} + xD^k] = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) kD^{k-1} + x \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) D^k.$$

Posto

$$\mathfrak{L}'(z, x) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} = \sum_{k=0}^{+\infty} kf_k(x) z^{k-1},$$

ha senso considerare l'operatore differenziale

$$L' = \mathfrak{L}'(D, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} kf_k(x) D^{k-1}$$

e si ha:

$$\mathrm{L}x = \mathrm{L}' + x\mathrm{L}.$$

In modo analogo, posto:

$$\mathfrak{L}^{(j)}(z, x) = \frac{\partial^j \mathfrak{L}(z, x)}{\partial z^j} \tag{3}$$

$$\mathrm{L}^{(j)} = \mathfrak{L}^{(j)}(\mathrm{D}, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-j+1) f_k(x)\,\mathrm{D}^{k-j} \tag{3$_1$}$$

si ha:

$$\mathrm{L}x^j = \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} x^l\,\mathrm{L}^{(j-l)}. \tag{4}$$

Sostituendo tali espressioni nella equazione (1) si trova:

$$\left[\mathrm{L}^{(n)} + \binom{n}{1} x\mathrm{L}^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1}\mathrm{L}' + x^n \mathrm{L}\right] + \tag{5}$$

$$+ a_1(x)\left|\mathrm{L}^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} x\mathrm{L}^{(n-2)} + \cdots\right| + \cdots + a_{n-1}(x)\,[\mathrm{L}' + x\mathrm{L}] + a_n(x)\,\mathrm{L} = 0.$$

Questa equazione è sicuramente soddisfatta, qualunque sia l'insieme di definizione degli operatori L, se, per ogni valore di x, la funzione $\mathfrak{L}(x, z)$ è soluzione della equazione:

$$\left[\mathfrak{L}^{(n)} + \binom{n}{1} x\mathfrak{L}^{(n-1)} + \cdots\right] + a_1(x)\left[\mathfrak{L}^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} x\mathfrak{L}^{(n-2)} + \cdots\right] + \tag{6}$$

$$+ \cdots + a_n(x)\,\mathfrak{L} = 0\,.$$

Quest'ultima espressione, tenendo conto della (3), è una equazione differenziale lineare nella incognita z, i cui coefficienti sono costanti rispetto a z, ma dipendono dalla variabile x. Essa ammette le n soluzioni linearmente indipendenti

$$\mathfrak{L}_{sh}(z, x) = z^h\,e^{\alpha_s(x)z}$$

dove $\alpha_s(x)$ è radice della equazione caratteristica

$$(\alpha + x)^n + a_1(x)(\alpha + x)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)(\alpha + x) + a_n(x) = 0 \tag{7}$$

$\left(s = 1, 2, \cdots, m;\quad h = 1, 2, \cdots, p_s - 1;\quad p_s \text{ ordine di molteplicità della soluzione } \alpha_s;\ \sum_{s=1}^{m} p_s = n\right)$.

A ciascuna delle soluzioni della equazione (6), corrisponde un operatore $\mathrm{D}^h\,e^{\alpha_s(x)\mathrm{D}}$ soluzione della (5) e quindi della (1).

Possiamo pertanto concludere:

L'equazione (1) *ammette sempre n soluzioni linearmente indipendenti del tipo* (2): *gli operatori*:

$$\mathrm{L}_{sh} \equiv \mathrm{D}^h\,e^{\alpha_s(x)\mathrm{D}} \qquad \left(s = 1, 2, \cdots, m\,;\ h = 1, 2, \cdots p_s\,;\ \sum_{j=1}^{m} p_s = n\right) \tag{8}$$

dove le α_s *sono le m soluzioni distinte dell'equazione algebrica* (7); *e con* p_s *si sono indicate le rispettive molteplicità. Ogni combinazione lineare, a coefficienti dipendenti da x, di questi operatori è ancora soluzione della* (1).

Mostreremo più avanti, che si ottengono in questo modo tutte le soluzioni della (1) soddisfacenti ad un opportuno requisito di continuità.

ESEMPIO 1. Consideriamo l'equazione:

$$\mathrm{L}x^4 - 4x\,\mathrm{L}x^3 + 2x^2(3+x^2)\,\mathrm{L}x^2 - 4x^3(x^2+1)\,\mathrm{L}x + x^4(x^2+1)^2\mathrm{L} = 0$$

essa ammette soluzioni del tipo $\mathrm{L} = e^{\alpha(x)\mathrm{D}}$ se $\alpha(x)$ è soluzione della equazione

$$(\alpha+x)^4 - 4x(\alpha+x)^3 + 2x^2(3+x^2)(\alpha+x)^2 - 4x^3(x^2+1)(\alpha+x) + x^4(x^2+1)^2 = 0\,;$$

otteniamo così le radici doppie $\alpha = \pm ix^2$ corrispondenti ai quattro operatori linearmente indipendenti $e^{ix^2\mathrm{D}}$, $e^{-ix^2\mathrm{D}}$; $\mathrm{D}e^{ix^2\mathrm{D}}$, $\mathrm{D}e^{-ix^2\mathrm{D}}$.

I.2. *Rappresentazione delle soluzioni mediante operatori di traslazione.*

Esprimeremo ora gli operatori trovati in una forma equivalente, che meglio si presta all'estensione del loro dominio di definizione.

Tenendo presente che risulta

$$e^{\alpha_s(x)\mathrm{D}}\,\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[\alpha_s(x)]^k}{k!}\,\varphi^{(k)}(x) = \varphi[x+\alpha_s(x)] \tag{9}$$

si ha intanto che gli operatori L_{sh} equivalgono alla applicazione di operatori di traslazione del tipo (9), seguiti da operatori di derivazione:

$$\mathrm{L}_{sh}\,\varphi(x) = \frac{\mathrm{d}^h}{\mathrm{d}x^h}\,\varphi[x+\alpha_s(x)]\,. \tag{8_1}$$

Osserviamo poi che gli operatori del tipo $\mathrm{D}^j\,e^{\alpha_s(x)\mathrm{D}}$ pur non coincidendo in generale con i corrispondenti operatori $e^{\alpha_s(x)\mathrm{D}}\,\mathrm{D}^j$ possono sempre essere espressi come combinazione lineare di questi ultimi (e viceversa).

Si ha infatti:

$$\mathrm{D}^j\,e^{\alpha_s(x)\mathrm{D}}\,\varphi(x) = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\,\varphi[x+\alpha(x)] = \sum_{j=0}^{p_s} q_j(x)\,\varphi^{(p_s-j)}[x+\alpha_s(x)] =$$

$$= \sum_{j=0}^{p_s} g_j(x)\,e^{\alpha_s(x)\mathrm{D}}\,\mathrm{D}^j\,\varphi(x),$$

dove i coefficienti $g_j(x)$ sono delle funzioni di x, dipendenti da $\alpha(x)$ e dalle sue derivate fino a quella di ordine j.

Si ha dunque:

$$\mathrm{D}^j\,e^{\alpha_s(x)\mathrm{D}} = \sum_{j=0}^{p_s} g_j(x)\,e^{\alpha_s(x)\mathrm{D}}\,\mathrm{D}^j\,.$$

La più generale soluzione, di tipo (2), della equazione (1), può dunque essere espressa indifferentemente come combinazione lineare degli operatori (8), (8_1) o degli operatori

$$(8_2) \qquad e^{\alpha_s(x)\mathrm{D}}\,\mathrm{D}^j : \qquad \varphi(x) \to \varphi^{(j)}[x+\alpha(x)]$$

che trasformano le $\varphi(x) \in \Phi$ nelle funzioni ottenute applicando gli operatori di traslazione (9) alle $\varphi(x)$ medesime e alle loro derivate successive $\varphi^{(j)}(x)$ fino all'ordine p_s.

I.3. *Rappresentazione delle soluzioni come operatori integrali.*

Possiamo ora facilmente scrivere le soluzioni trovate sotto forma di operatori integrali, cioè del tipo:

$$(10) \qquad \mathrm{L}[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x, y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y .$$

Si ha infatti

$$\varphi^{(j)}[x+\alpha(x)] = \int \delta^{(j)}[y-x-\alpha(x)]\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

e quindi in corrispondenza all'operatore $\mathrm{L} : \varphi(x) \to \varphi^{(j)}[x+\alpha(x)]$ risulta $k(x, y) = \delta^{(j)}[y-x-\alpha(x)]$. Vogliamo vedere se l'equazione (1) ammette altre soluzioni rappresentabili come operatori integrali, oltre a quelle già trovate.

Sostituendo la (10) nella (1) si ottiene l'equazione operatoriale, nella incognita $k(x, y)$:

$$(11) \qquad k(x, y)\,[y^n + a_1(x)\,y^{n-1} + \cdots + a_n(x)] = 0 .$$

Applicando la trasformazione di Fourier, rispetto alla variabile y, posto:

$$(12) \qquad \hat{k}(x, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi}\,k(x, y)\,\mathrm{d}y .$$

Si ottiene:

$$i^n \frac{\partial^n \hat{k}}{\partial \xi^n} + a_1(x)\,i^{n-1} \frac{\partial^{n-1} \hat{k}}{\partial \xi^{n-1}} + \cdots + a_n(x)\,\hat{k} = 0 .$$

Questa è una equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti rispetto alla variabile indipendente ξ in cui compare x come parametro, ammette dunque n soluzioni linearmente indipendenti

$$(13) \qquad \hat{k}(x, \xi) = (-i\xi)^h\, e^{-i\beta_s(x)\xi}$$

$$\left(h = 0, 1, 2, \cdots, (p_s - 1) ;\; s = 1, 2, \cdots, m;\; \sum_{s=1}^{m} p_s = n\right)$$

dove $\beta_s(x)$ è radice di molteplicità p_s della equazione caratteristica

$$\beta^n + a_1(x)\,\beta^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0 \tag{14}$$

cioè della (7) ove si ponga $\beta \equiv \alpha + x$. Dalle (13) si ricava

$$k(x,y) = \delta^{(h)}[y - \beta(x)] = \delta^{(h)}[y - x - \alpha(x)]. \tag{15}$$

È chiaro, in particolare, che non vi sono soluzioni con $k(x,y)$ funzione nel senso ordinario (salvo la funzione identicamente nulla) come si potrebbe anche verificare in modo più diretto.

I due metodi seguiti, ci hanno dunque portato alle stesse soluzioni, palesemente definite sull'intero spazio H delle funzioni analitiche intere, coerentemente con quanto si era supposto inizialmente. E poiché l'operatore (10) è il più generale operatore lineare continuo rispetto alla topologia usuale in H, possiamo dire che *tutte e sole le soluzioni della* (1) *sono date dalla seguente espressione*:

$$L = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,L_i \tag{16}$$

dove

$$L_i = D^h\, e^{[x+\beta(x)]D} = \delta^{(h)}[y - \beta(x)].$$

In questo senso diremo che l'espressione (16) *rappresenta l'integrale generale della equazione operatoriale* (1).

ESEMPIO 2. Sia data l'equazione operatoriale

$$Lx^3 + [1 - 3g^2(x)]\,Lx + 2g(x)\,[1 + g^2(x)]\,L = 0$$

dove $g(x)$ è una arbitraria funzione. Risolveremo questa equazione applicando il metodo ora descritto. Il nucleo $k(x,y)$ dell'operatore che noi cerchiamo deve soddisfare l'equazione:

$$k(x,y)\,\{y^3 + [1 - 3g^2(x)]\,y + 2g(x)\,[1 + g^2(x)]\} = 0.$$

Passando alle trasformate di Fourier, otteniamo l'equazione differenziale in ξ:

$$-i\frac{\partial^3\hat{k}}{\partial\xi^3} + i\,[1 - 3g^2(x)]\frac{\partial\hat{k}}{\partial\xi} + 2g(x)\,[1 + g^2(x)]\,\hat{k} = 0$$

che ammette le tre soluzioni linearmente indipendenti

$$\hat{k}_1 = e^{2ig(x)\xi} \quad ; \quad \hat{k}_2 = e^{-i[g(x)+i]\xi} \quad ; \quad \hat{k}_3 = e^{-i[g(x)-i]\xi}.$$

Otteniamo infine come soluzione del nostro problema i tre operatori

$$L_1 = \delta[y + 2g(x)] \quad ; \quad L_2 = \delta[y - g(x) - i] \quad ; \quad L_3 = \delta[y - g(x) + i].$$

ESEMPIO 3. Sia data l'equazione:

$$Lx^2 - 2x^2\,Lx + 4x^4\,L = 0.$$

Il nucleo $k(x,y)$ dell'operatore soluzione deve soddisfare l'equazione

$$k(x,y)\,\{y^2 - 2x^2 y + 4x^4\} = 0.$$

Questa equazione ammette le soluzioni $K_i = \delta [y - \alpha_i (x)]$, dove $y = \alpha_i (x)$ $(i = 1, 2)$ è soluzione della equazione caratteristica $y^2 - 2x^2 y + 4x^4 = 0$.

Pertanto, l'integrale generale della equazione data è

$$L = c_1 (x)\, \delta [y - (1 - i\sqrt{3})\, x^2] + c_2 (x)\, \delta [y - (1 + i\sqrt{3})\, x^2].$$

II. STUDIO DELLA EQUAZIONE COMPLETA

Come si è già osservato nell'introduzione, l'integrale generale della equazione completa si ottiene aggiungendo all'integrale generale della equazione omogenea un integrale particolare dell'equazione completa. Il problema si riconduce pertanto alla ricerca di un integrale particolare della equazione completa.

Risolveremo dapprima il nostro problema nei casi particolari in cui il termine noto è costituito o da un operatore di moltiplicazione per una funzione $M(x)$, o da un operatore differenziale; quindi lo risolveremo in generale rappresentando il termine noto come operatore integrale.

II.1. *Il termine noto è un operatore di moltiplicazione.*

Sia $M(x)$ una funzione della variabile x, a valori complessi; consideriamo l'equazione:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (x)\, L [x^{n-i} \varphi (x)] = M (x)\, \varphi (x) \tag{17}$$

cerchiamo un integrale particolare $\bar{L}$ di questa equazione che sia anch'esso un operatore di moltiplicazione:

$$\bar{L} [\varphi (x)] = N (x)\, \varphi (x). \tag{18}$$

Sostituendo nella (17) si ottiene

$$N (x)\, \varphi (x) \sum_{i=0}^{n} a_i (x)\, x^{n-i} = M (x)\, \varphi (x)$$

da cui si ricava:

$$N (x) = \frac{M (x)}{\sum_{i=0}^{n} a_i (x)\, x^{n-i}}\,. \tag{19}$$

II.2. *Il termine noto è un operatore differenziale.*

Sia data l'equazione:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (x)\, L x^{n-i} = G (x, D) \tag{20}$$

con $G(x, D) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) D^k$; l'operatore

$$(21) \qquad \bar{L} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) D^k = \mathfrak{L}(x, D),$$

soluzione della (20), dovrà soddisfare l'equazione differenziale lineare nella incognita $\mathfrak{L}(x, D)$

$$(22) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \left[\mathfrak{L}^{(n-i)} + \binom{n-i-1}{1} x \mathfrak{L}^{(n-i-1)} + \cdots + x^{n-i} \mathfrak{L} \right] = G(x, D).$$

Pertanto la ricerca di un integrale particolare della (20) è ricondotta alla ricerca di un integrale particolare della equazione differenziale lineare nella incognita z, a coefficienti dipendenti dal parametro x, che si ottiene dalla (22) con la posizione $D \equiv z$.

II.3. *Il termine noto è un operatore integrale.*

Sia data l'equazione:

$$(23) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i(x) Lx^{n-1} \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, y) \varphi(y) \, dy$$

dove $T(x, y)$ è una distribuzione. Cerchiamo soluzioni del tipo:

$$(24) \qquad L[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x, y) \varphi(y) \, dy.$$

Sostituendo nella (23), otteniamo:

$$(25) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i(x) k(x, y) y^{n-i} = T(x, y).$$

Pertanto, la distribuzione

$$(26) \qquad k(x, y) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_i(x) y^{n-i}} T(x, y).$$

è l'integrale particolare da noi cercato.

II.4. *Alcuni esempi.*

Concludiamo illustrando i suddetti metodi di risoluzione con alcuni esempi.

ESEMPIO 4. Sia data l'equazione completa:

$$Lx^4 + 2(1 - x^2) Lx^2 + (1 + x^2)^2 L = A$$

dove A, il termine noto, è un operatore che possiamo porre rispettivamente uguale a:

$$(a)\ \mathrm{A} = \mathrm{I}: \qquad \varphi(x) \to \varphi(x);$$

$$(b)\ \mathrm{A} = e^{x\mathrm{D}}: \qquad \varphi(x) \to \varphi(2x);$$

$$(c)\ \mathrm{A} = \|\ \|_{\mathrm{L}^2}: \qquad \varphi(x) \to \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, \mathrm{d}x.$$

Consideriamo dapprima l'equazione omogenea associata, e cerchiamone soluzioni, ad esempio, del tipo $\mathrm{L} = e^{\alpha(x)\mathrm{D}}$. Scritta l'equazione caratteristica

$$(\alpha + x)^4 + 2(1 - x^2)(\alpha + x)^2 + (1 + x^2)^2 = 0$$

otteniamo le radici

$$\alpha_1 = i \quad , \quad \alpha_2 = -i \quad , \quad \alpha_3 = -2x + i \quad , \quad \alpha_4 = -2x - i.$$

Pertanto, l'integrale generale della equazione omogenea associata è:

$$\mathrm{L} = c_1(x)\, e^{i\mathrm{D}} + c_2(x)\, e^{-i\mathrm{D}} + c_3(x)\, e^{-(2x-i)\mathrm{D}} + c_4(x)\, e^{-(2x-i)\mathrm{D}}.$$

Nel caso (a), l'operatore A è un operatore di moltiplicazione, e, per la ricerca di un integrale particolare, si può applicare il primo dei tre metodi indicati. Si ottiene:

$$\mathrm{N}[\varphi(x)] = \frac{1}{4x^2 + 1}\, \varphi(x)$$

sicché l'integrale generale della equazione completa è:

$$\mathrm{L} = c_1(x)\, e^{i\mathrm{D}} + c_2(x)\, e^{-i\mathrm{D}} + c_3(x)\, e^{-(2x+i)\mathrm{D}} + c_4(x)\, e^{-(2x-i)\mathrm{D}} + \frac{1}{4x^2 + 1} .$$

Nel caso (b), la risoluzione di questa equazione si riconduce alla risoluzione della equazione differenziale lineare completa, nella incognita $\mathfrak{L}(x, y)$:

$$\frac{\partial^4 \mathfrak{L}}{\partial z^4} + 4x \frac{\partial^3 \mathfrak{L}}{\partial z^3} + (4x^2 + 2) \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial z^2} + 4x \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} + (4x^2 + 1)\, \mathfrak{L} = e^{xz} .$$

Una soluzione particolare di questa equazione differenziale è:

$$\bar{\mathfrak{L}} = \frac{1}{9x^4 + 10x^2 + 1}\, e^{xz} .$$

Pertanto l'integrale generale della equazione operatoriale è:

$$\mathrm{L} = c_1(x)\, e^{i\mathrm{D}} + c_2(x)\, e^{-i\mathrm{D}} + c_3(x)\, e^{-(2x+i)\mathrm{D}} + c_4(x)\, e^{-(2x-i)\mathrm{D}} + \frac{1}{9x^4 + 10x^2 + 1}\, e^{x\mathrm{D}}.$$

Nel caso (c), infine, applicando il terzo metodo sopra descritto, si vede facilmente che un operatore soluzione della equazione è:

$$\mathrm{L} = \varphi(x) \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^4 + 2(1 - x^2)\, y^2 + (1 + x^2)^2}\, |\varphi(y)|^2\, \mathrm{d}y .$$

III. PROPRIETÀ DELL'INSIEME DI DEFINIZIONE DELLE SOLUZIONI DELLA EQUAZIONE OMOGENEA

Si è già osservato che le soluzioni dell'equazione (1), che d'ora in poi sarà conveniente rappresentare come combinazioni lineari di operatori del tipo (8_2), sono sempre definite sull'insieme H delle funzioni prolungabili analiticamente come funzioni intere, ed è chiaro che gli operatori (82) trasformano H in sé se e solo se le corrispondenti funzioni $\alpha(x)$ appartengono esse stesse ad H. Posto $\beta(x) \equiv x + \alpha(x)$ ed $L_\beta \varphi(x) = \varphi[\beta(x)]$, ciò equivale a dire che l'operatore L, che nel seguito intenderemo sempre del tipo

$$L \equiv L_\beta D^j : \varphi(x) \to \varphi^{(j)}[\beta(x)], \tag{27}$$

lascia invariante H se e solo se $\beta(x) \in H$.

Riconosceremo che, sotto diverse condizioni riguardo alla funzione β, il dominio di definizione di L, opportunamente ampliato, ammette ancora sottospazi invarianti rispetto ad L, in modo che su di essi risultano definite anche le potenze intere di L. Esamineremo in particolare condizioni su β in corrispondenza alle quali l'operatore L lascia invariante un insieme di funzioni denso in L^2, o lo trasforma in un insieme eventualmente diverso ma ancora contenuto in L^2.

β *reale di classe* C^∞. In questo caso L_β, D^j e quindi L sono definiti sull'insieme C^∞ delle funzioni $\varphi(x)$ infinitamente derivabili, e tale insieme è invariante. (Per β reale e $k \geq j$ l'operatore L è anche definito sull'insieme delle funzioni di classe C^k, che però non risulta invariante).

β *reale a crescenza polinomiale*. Supponiamo che risulti: a) β di classe C^∞, b) $\lim\limits_{x\to\infty} |\beta(x)| = +\infty$, c) per ogni q, esiste un intero h (dipendente da q) tale che $\lim\limits_{x\to\infty} \left|\dfrac{\beta^{(q)}(x)}{x^h}\right| = l \neq 0$. L è allora definito sull'insieme S delle funzioni C^∞ a decrescenza rapida, cioè tali che risulti:

$$\lim_{x\to\infty} |x^k \varphi^{(q)}(x)| = 0 \qquad \forall q, \forall k;$$

ed S risulta invariante.

Infatti, posto $\varphi[\beta(x)] = \psi(x)$, si ha

$$\psi^{(q)}(x) = \frac{d^q}{dx^q} \varphi[\beta(x)] = \sum_{\substack{m=1 \\ n,p\leq q}}^{q} a_{m,n,p}\, \varphi^{(m)}[\beta(x)]\,[\beta^{(n)}(x)]^p .$$

Per dimostrare l'asserto sarà dunque sufficiente far vedere che

$$\lim_{x\to\infty} |x^k \psi^{(q)}(x)| = 0 ,$$

relazione certamente soddisfatta, nelle nostre ipotesi, se risulta

$$\lim_{x\to\infty} |x^k \varphi^{(m)}[\beta(x)]| = 0 .$$

Ma

$$\lim_{x\to\infty} |x^k \varphi^{(m)}(\beta)| = \lim_{x\to\infty} |[\beta(x)]^{k/h} \varphi^{(m)}(\beta)| = \lim_{t\to\infty} |t^{k/h} \varphi^{(m)}(t)| = 0$$

da cui l'asserto.

β *complessa.* Poniamo $\beta(x) = u(x) + iv(x)$, con u e v reali, e sia γ la curva del piano (u, v) di equazioni parametriche $u = u(x)$, $v = v(x)$, rappresentante il codominio della funzione β. L'operatore L_β, che già sappiamo essere definito sulle funzioni prolungabili analiticamente come funzioni intere, può essere esteso a tutte le funzioni $\varphi(x)$ che ammettono un prolungamento analitico in una regione del piano complesso contenente γ. L'eventuale esistenza di sottospazi densi in L^2 che risultino invarianti o vengano trasformati in sottinsiemi diversi di L^2 andrà esaminata caso per caso tenendo conto della forma specifica di β.

Consideriamo in particolare il caso in cui v è costante. In base a quanto ora detto, l'operatore L è definito sulle funzioni C^∞ prolungabili analiticamente in una striscia del piano complesso contenente la retta $y = v$.

A conclusioni analoghe si giunge rappresentando L come operatore differenziale, cioè

$$L_\beta = e^{[\beta(x)-x]D} = e^{[u(x)-x]D} (\cos vD + i \operatorname{sen} vD) .$$

In tal caso L_β sarà definito in un insieme in cui sono definiti entrambi gli operatori $e^{[u(x)-x]D}$ e $e^{ivD} = \cos vD + i \operatorname{sen} vD$. Il primo di questi, poiché $u(x)$ è una funzione reale, ricade in uno dei casi precedenti se u è C^∞ oppure a crescenza polinomiale. Per quanto riguarda gli operatori $\cos vD$ e $\operatorname{sen} vD$ osserviamo che le funzioni $\cos vs$ e $\operatorname{sen} vs$ sono delle funzioni intere della variabile complessa s, verificanti le limitazioni:

$$|\cos vs| \leq e^{|v|\,|s|} \qquad\qquad |\operatorname{sen} vs| \leq e^{|v|\,|s|}$$

sono cioè funzioni intere di ordine ≤ 1 e di tipo $\leq |v|$; allora gli operatori $\cos vD$ e $\operatorname{sen} vD$ sono definiti nello spazio $S^{1,\,1/(|v|\,e^2)}$, e trasformano questo spazio nello spazio $S^{1,\,1/(|v|\,e)}$. Ora si può verificare che lo spazio $S^{1,B}$ è lo spazio delle funzioni C^∞, a decrescenza rapida, che sono inoltre prolungabili nella striscia $|y| < \dfrac{1}{Be}$. Se cerchiamo un sottoinsieme di L^2 in cui questi operatori sono definiti, possiamo dire che *gli operatori* $\cos vD$ *e* $\operatorname{sen} vD$ *sono definiti sulle funzioni di* S, *prolungabili nella striscia* $|y| < |v|\,e$, *e le trasformano in funzioni prolungabili nella striscia* $|y| < |v|$ (2).

(2) Per quanto riguarda gli spazi di tipo S e gli operatori differenziali di ordine infinito cfr. GUELFAND-CHILOV, *Les distributions*, Vol. 2, cap. 4, par. 2,2 e par. 5,2 (Dunod).