Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cesare Parenti

Parametrici "ottimali" per certi operatori di Green

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.2, p. 204–208.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_2_204_0>

Teoria degli operatori. — *Parametrici « ottimali » per certi operatori di Green* (*). Nota I di CESARE PARENTI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — Some results concerning the parametrices for some elliptic Green operators are proved.

INTRODUZIONE

Oggetto di questo lavoro sono alcune semplici osservazioni sulle parametrici di certi operatori di Green. Precisamente mostriamo, tra l'altro, che tra le parametrici sinistre di un sistema ellittico sopradeterminato A (su una varietà compatta senza bordo) ne esiste una, G, ottimale, cioè tale che GA–identità è un proiettore sul nucleo di A. Da ciò segue che l'operatore pseudo–differenziale AG è un proiettore sull'immagine di A e quindi che il sistema

$$Au = f \quad , \quad f \in \mathcal{D}'$$

ha soluzione se e solo se $AGf = f$. Con ciò si ottiene, crediamo, un effettivo miglioramento dei risultati di [7] e [8] ove l'operatore di compatibilità per risolvere il sistema $Au = f$, quando ad esempio $f \in H^s$ (H^s è l'ordinario spazio di Sobolev hilbertiano d'ordine s), dipende dall'ordine s e non è il prolungamento continuo in H^s di un operatore pseudo–differenziale indipendente da s.

Le notazioni usate sono, salvo il contrario, quelle di [1] e [4].

RICHIAMI

Qui X indica una varietà reale C^∞ compatta e senza bordo. Indichiamo con $T^*(X)$ il fibrato cotangente su X e poniamo $T_0^*(X) = T^*(X) \setminus X$.

L'applicazione $\pi_X : T_0^*(X) \to X$ è la proiezione canonica su X. Con $E, F, \cdots$ indichiamo dei fibrati vettoriali (C^∞ e complessi) di rango finito e di base X (tali fibrati si supporranno muniti di una metrica hermitiana). $C^\infty(X, E)$ (risp. $\mathcal{D}'(X, E)$) indica lo spazio delle sezioni C^∞ (risp. sezione distribuzioni) di E, mentre con $H^t(X, E)$, $t \in \mathbf{R}$, si indica l'ordinario spazio di Sobolev hilbertiano d'ordine t (cfr. [4]).

Se $m \in \mathbf{R}$, $L^m(X; E, F)$ ($L^m(X; E)$ se $E = F$) indica lo spazio degli operatori lineari continui

$$A: \quad C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, F)$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta del 9 febbraio 1974.

che sono *pseudo-differenziali classici* d'ordine m tra i fibrati E ed F (com'è noto A è prolungabile con continuità da $\mathcal{D}'(X, E)$ in $\mathcal{D}'(X, F)$). Con $L^{-\infty}(X; E, F)$ indichiamo lo spazio degli operatori lineari continui

$$r: \quad \mathcal{D}'(X, E) \to C^{\infty}(X, F)$$

regolarizzanti (cioè a nucleo distribuzione C^{∞}).

Se $A \in L^{m}(X; E, F)$, indichiamo con $\sigma(A)$ il *simbolo principale* di A (cfr. [1]) come morfismo C^{∞}

$$\sigma(A): \quad \pi_X^* E \to \pi_X^* F$$

tra le immagini reciproche di E ed F tramite π_X (si ha quindi che $\sigma(A)(x, \lambda\xi) = \lambda^m \ \sigma(A)(x, \xi)$ per ogni $(x, \xi) \in T_0^*(X)$ e per ogni $\lambda > 0$). Ricordiamo che un operatore $A \in L^{m}(X; E, F)$ si dice *ellittico* se $\sigma(A)$ è un isomorfismo. È noto (cfr. [1], [4], [5]) che A è ellittico se e solo se esiste $P \in L^{-m}(X; F, E)$ tale che

$$PA - I_E \in L^{-\infty}(X; E) \quad , \quad AP - I_F \in L^{-\infty}(X; F).$$

Un operatore P cosiffatto si dice una *parametrice* (bilatera) per A.

Ne viene immediatamente che, qualora A sia ellittico, l'operatore

$$A: \quad C^{\infty}(X, E) \to C^{\infty}(X, F)$$

ha nucleo, Ker A, e conucleo, $\mathrm{Coker}\, A = C^{\infty}(X, F)/\mathrm{Im}\, A$, di dimensione finita.

Ricordiamo anche la nozione di complesso ellittico (cfr. [1]). Consideriamo una successione

$$C^{\infty}(X, E_0) \xrightarrow{D_0} C^{\infty}(X, E_1) \xrightarrow{D_1} C^{\infty}(X, E_2) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{D_{n-1}} C^{\infty}(X, E_n)$$

con $D_j \in L^m(X; E_j, E_{j+1})$, $0 \leq j \leq n-1$; una tale successione la indicheremo anche con (E, D, n); (E, D, n) si dice un *complesso ellittico* se: i) $D_{j+1} D_j = 0$, $0 \leq j \leq n-2$; ii) la successione

$$\pi_X^* E_0 \xrightarrow{\sigma(D_0)} \pi_X^* E_1 \xrightarrow{\sigma(D_1)} \pi_X^* E_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\sigma(D_{n-1})} \pi_X^* E_n \qquad \text{è } \textit{esatta}.$$

PARAMETRICE OTTIMALE PER UN OPERATORE PSEUDO-DIFFERENZIALE

Dimostriamo il

TEOREMA 1. *Sia* $A \in L^m(X; E, F)$ *ellittico. Esiste una parametrice* Q *per* A *tale che*

i) $QA - I_E$ *è un proiettore sul nucleo di* A.

ii) $AQ - I_F$ *è un proiettore su un supplementare, in* $C^{\infty}(X, F)$, *dell'immagine di* A.

Prova. Intanto è sufficiente provare il teorema per $m = 0$. In effetti, se il risultato è vero in tal caso, definiamo

$$A' = A(I_E - \Delta_E)^{-m/2} \tag{1}$$

essendo Δ_E un «laplaciano» (negativo !) su $X(\Delta_E \in L^2(X ; E)$ e $\sigma(\Delta_E) = - |\xi|^2 I_E)$. L'operatore A' è ellittico d'ordine zero. Dunque esiste $Q' \in L^0(X ; F, E)$ tale che

$$Q'A' - I_E = \rho_1' \quad ; \quad A'Q' - I_F = \rho_2' \tag{2}$$

dove ρ_1' è un proiettore regolarizzante su Ker A' e ρ_2' è un proiettore regolarizzante su un supplementare, in $C^\infty(X, F)$, di $\operatorname{Im} A' = \operatorname{Im} A$ (in quanto $I_E - \Delta_E$ è un isomorfismo). Abbiamo allora, da (2),

$$\left\{\begin{array}{l} [(I_E - \Delta_E)^{-m/2} Q'] A = I_E - (I_E - \Delta_E^{-m/2}) \rho_1' (I_E - \Delta_E)^{m/2} \\ A [(I_E - \Delta_E)^{-m/2} Q'] = I_F - \rho_2' \end{array}\right. \tag{3}$$

ed è chiaro che $\rho_1 = (I_E - \Delta_E)^{-m/2} \rho_1' (I_E - \Delta_E)^{m/2}$ è un proiettore regolarizzante su Ker A. Supponiamo quindi $A \in L^0(X ; E, F)$ e sia A l'aggiunto formale di A (ellittico al pari di A in quanto $\sigma(A^*) = \sigma(A)^*$).

Abbiamo com'è noto (cfr. [1]) la decomposizione ortogonale (per il prodotto interno in H^0)

$$\left\{\begin{array}{l} C^\infty(X, E) = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^* \\ C^\infty(X, F) = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^*. \end{array}\right. \tag{4}$$

Sia $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ una base ortonormale di Ker A^* e definiamo

$$\rho_2 : \ \mathcal{D}'(X, F) \to C^\infty(X, F) \quad , \quad \rho_2(f) = \sum_{j=1}^{n} \langle f, \overline{\varphi}_j \rangle \varphi_j \tag{5}$$

($\langle , \rangle$ indica la dualità tra $\mathcal{D}'(X, F)$ e $C^\infty(X, F)$).

L'operatore ρ_2 è regolarizzante giacchè il suo nucleo è $\sum_j \varphi_j(x) \otimes \overline{\varphi}_j(y)$ e proietta $C^\infty(X, F)$ su Ker A^*. Consideriamo ora l'operatore

$$B = AA^* + \rho_2^* \rho_2 \tag{6}$$

B è ellittico d'ordine zero $(\sigma(B) = \sigma(A) \sigma(A)^*)$ ed è formalmente autoaggiunto ed iniettivo. Dunque B è un isomorfismo di $C^\infty(X, F)$ in sè.

L'operatore $B^{-1}: C^\infty(X, F) \to C^\infty(X, F)$ è un operatore pseudodifferenziale d'ordine zero. Infatti, per quanto visto nei Richiami, esiste $\Phi \in L^0(X ; F)$ tale che $B\Phi - I_F \in L^{-\infty}(X ; F)$ e quindi $B^{-1} = \Phi + r$ con r regolarizzante. Definiamo ora

$$Q = A^* B^{-1}. \tag{7}$$

Ora se $u \in C^\infty(X, E)$, da (4) segue che $u = \varphi + A^* A\psi$, $\varphi \in \operatorname{Ker} A$ e quindi

$$QA u = QA(A^* A\psi) = Q[AA^* + \rho_2^* \rho_2] A\psi = A^* A\psi = u - \varphi$$

giacchè $\rho_2 A = 0$. Dunque

$$QA = I_F - \rho_1 \tag{8}$$

essendo ρ_1 la proiezione ortogonale su Ker A fatta parallelamente ad Im A^*.

Infine, se $f \in C^\infty(X, F)$, si ha, sempre da (4), $f = AA^* g + h$, $h \in \operatorname{Ker} A^*$ e quindi, tenuto conto di (8), avremo

$$AQf = AQAA^*g + AQh = AA^*g - A\rho_1 A^*g + AQh = AA^*g = f - h$$

in quanto, da una parte, $\rho_1 A^* = 0$ e, d'altra parte, $h = Bh$, sicchè $AQh = 0$.

In conclusione

$$AQ = I_F - \rho_1 . \tag{9}$$

Il teorema è così dimostrato. ■

Ricordiamo (cfr. [4]) che se $A \in L^m(X; E, F)$ allora, per ogni $t \in \mathbf{R}$, A si prolunga in un ben definito operatore lineare continuo

$$A_t : \ H^t(X, E) \to H^{t-m}(X, F) \tag{10}$$

($A_t = A$ su $C^\infty(X, E)$). Supposto A ellittico, segue dal teorema ora dimostrato che $Q_{t-m} A_t u = u - \rho_1(u)$, $\forall u \in H^t(X, E)$ e $A_t Q_{t-m} f = f - \rho_2(f)$, $\forall f \in H^{t-m}(X, F)$. Giacchè ρ_1 e ρ_2, in quanto regolarizzanti, sono operatori compatti da $H^t(X, E)$ in sè e da $H^{t-m}(X, F)$ in sè, ne viene che Q_{t-m} è un pseudo–inverso a destra ed a sinistra per A_t.

Proviamo ora il

TEOREMA 2. *Sia* (E, D, n) *un complesso ellittico su* X. *Esistono* $Q_j \in L^{-m}(X; E_{j+1}, E_j)$, $0 \le j \le n-1$, *tali che*

$$D_{j-1} Q_{j-1} + Q_j D_j = I_{E_j} - \rho_j , \qquad 1 \le j \le n-1 \tag{11}$$

dove ρ_j *è un proiettore regolarizzante su* $\operatorname{Ker} D_j \cap \operatorname{Ker} D^*_{j-1}$.

Prova. Per le ipotesi fatte l'operatore

$$\Delta_j = D^*_j D_j + D_{j-1} D^*_{j-1} , \qquad 1 \le j \le n-1 \tag{12}$$

è ellittico (ed autoaggiunto) d'ordine $2m$. Quindi $\operatorname{Ker} \Delta_j = \operatorname{Ker} D_j \cap \operatorname{Ker} D^*_{j-1}$ è un sottospazio di dimensione finita di $C^\infty(X, E_j)$. Dal Teorema 1 segue che esiste una parametrice P_j per Δ_j tale che

$$\Delta_j P_j = P_j \Delta_j = I_{E_j} - \rho_j \tag{13}$$

dove $\rho_j \in L^{-\infty}(X; E_j)$ è un proiettore su $\operatorname{Ker} \Delta_j$. Poniamo quindi

$$Q_j = P_j D^*_j , \qquad 0 \le j \le n-1. \tag{14}$$

Giacchè, per ipotesi, $D_j \Delta_j = \Delta_{j+1} D_j$, si ha $P_{j+1} D_j \Delta_j P_j = P_{j+1} \Delta_{j+1} D_j P_j$.

Ora $P_{j+1} D_j \Delta_j P_j = P_{j+1} D_j (I_{E_j} - \rho_j) = P_{j+1} D_j$ in quanto $D_j \rho_j = 0$.

D'altra parte, $P_{j+1}\,\Delta_{j+1}\,D_j\,P_j = (I_{E_{j+1}} - \rho_{j+1})\,D_j\,P_j = D_j\,P_j$ in quanto si ha la decomposizione $C^\infty(X, E_{j+1}) = \operatorname{Ker}\Delta_{j+1} \oplus \operatorname{Im} D_j \oplus \operatorname{Im} D^*_{j+1}$.

Dunque si ha

$$P_{j+1}\,D_j = D_j\,P_j\,. \tag{15}$$

Di qui segue che

$$Q_j\,D_j + D_{j-1}\,Q_{j-1} = P_j\,D_j^*\,D_j + D_{j-1}\,P_{j-1}\,D^*_{j-1} =$$
$$= P_j\,[D_j^*\,D_j + D_{j-1}\,D^*_{j-1}] = P_j - \Delta_j = I_{E_j} - \rho\,.$$

Il teorema è così dimostrato. ∎

Una conseguenza del Teorema 2 è importante. Sia $A \in L^m(X\,;E, F)$ tale che $\sigma(A)$ sia un morfismo iniettivo (cioè, come si suol dire, A è *ellittico sopradeterminato*). Dal Teorema 2 segue che esiste $G \in L^{-m}(X\,;F, E)$ tale che $GA = I_E - \rho$ essendo ρ un proiettore regolarizzante su Ker A (che è di dimensione finita). Di qui segue che AG è un proiettore pseudo-differenziale d'ordine zero su $\operatorname{Im} A = A(C^\infty(X, E))$ (che è chiusa in $C^\infty(X, F)$).

Così se Δ_F è un laplaciano negativo e se poniamo

$$P = (I_F - \Delta_F)^{m/2}\,(I_F - AG)\,,$$

allora $P \in L^m(X\,;F)$ ed una sezione $f \in C^\infty(X, F)$ è nell'immagine di A se e solo se $Pf = 0$, ed in tal caso Gf è l'unica soluzione del sistema $Au = f$ per cui $\rho(u) = 0$. Poichè A, G e P, si prolungano con continuità in $\mathcal{D}'(X, E)$ e $\mathcal{D}'(X, F)$ rispettivamente, ne viene che la condizione di compatibilità per l'equazione $Au = f$ con $f \in \mathcal{D}'(X, F)$ (ad esempio $f \in H^t(X, F)$) è ancora $Pf = 0$. Abbiamo quindi un miglioramento effettivo rispetto al Teorema 1 di [7].

Bibliografia

[1] M. F. Atiyah e R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes*. I, «Ann. of Math.», *86*, 374–407 (1967).

[2] L. Boutet de Monvel, *Boundary problems for pseudo-differential operators*, «Acta Math.», *126*, 11–51 (1971).

[3] A. S. Dynin, *Elliptic boundary value problems for pseudo-differential complexes*, «Funct. Anal. i Ego Priloz.», *6* (1), 75–76 (1972).

[4] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems*, «Ann. of Math.», *83*, 129–209 (1966).

[5] R. T. Seeley, *Singular integrals and boundary problems*, «Amer. Journ. Math.», *80*, 781–809 (1966).

[6] V. A. Solonnikov, *On overdetermined elliptic boundary value problems*, «Dokl. Akad. Nauk.», *199* (2), 279–281 (1971); («Soviet Math. Dokl.», *12* (4), 1074–1077 (1971).

[7] E. Ș. Zuhovickaja, *Boundary value problems for overdetermined systems of differential equations*, «Dokl. Akad. Nauk.», *201* (3), 523–526 (1971); («Soviet Math. Dokl.», *12* (6), 1664–1668 (1971)).

[8] E. S. Zuhovickaja, *Sistemi ellittici sopradeterminati di equazioni su varietà compatte*, «Mat. Sbornik», *88* (4), 546–557 (1972) (in russo).