Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Mazzocca

Immergibilità in un $S_{4,q}$ di certi sistemi rigati di seconda specie

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.2, p. 189–196.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_2_189_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Geometrie di Galois. — *Immergibilità in un* $S_{4,q}$ *di certi sistemi rigati di seconda specie* (*). Nota di FRANCESCO MAZZOCCA, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Ruled systems of the second kind (cf. [5], [6], [7]) are studied. It is proved that such a system, when satisfying suitable graphic and arithmetical conditions, is isomorphic to a non-singular quadric of $S_{4,q}$.

1. PREMESSA

In uno spazio geometrico (S , R) (cfr. [4], Cap. I) diremo *punti* gli elementi di S, *rette* gli elementi di R. Due punti distinti di S si diranno *dipendenti* se esiste una retta che li contiene, *indipendenti* nel caso contrario. Uno spazio geometrico (S , R) sarà detto *sistema rigato* o *quadragono di Tits non degenere* (cfr. [5], [6], [7], [8]) se sono verificati i seguenti assiomi:

a) *Due rette distinte hanno al più un punto in comune*;

b) *se* P *è un punto ed* s *una retta, cui* P *non appartiene, esiste una, ed una sola, retta* t *incidente* s *ed includente* P;

c) *se* P *e* Q *sono due punti dipendenti esiste almeno un punto* T *indipendente sia da* P *che da* Q;

d) *esiste almeno un punto di* S *appartenente a tre rette distinte.*

Nel seguito ci occuperemo soltanto di sistemi rigati finiti.

In un sistema rigato dicesi *fascio di rette* di centro un punto P e si indica con F_P l'insieme delle rette passanti per P, inoltre l'insieme dei punti di S che stanno in F_P dicesi *blocco degenere di polo* P e si indica con t (P). Si prova (cfr. [5], n. 3; [7], n. 3) che tutte le rette hanno la stessa cardinalità r e tutti i fasci di rette hanno la stessa cardinalità n. L'intersezione di due blocchi degeneri con poli indipendenti è un insieme di n punti a due a due indipendenti che prende il nome di *linea*. Un sistema rigato si dirà di *prima specie* se, comunque si fissino due punti indipendenti, esiste un'unica linea che li contiene; si dirà di *seconda specie*, se per ogni linea passano soltanto due blocchi degeneri distinti; si dirà di *terza specie* in ogni altro caso. Si dimostra che (cfr. [5], n. 3; [7], n. 5) un sistema rigato può essere di una soltanto delle tre specie. In [5], [6], [7] sono stati studiati i sistemi rigati con particolare riguardo per quelli di prima specie e rimandiamo a tali Lavori per le generalità su di essi.

Nel presente Lavoro ci si occupa dei sistemi rigati finiti di seconda specie e si prova che una siffatta struttura, sotto opportune condizioni aritmetiche e grafiche, risulta isomorfa ad una quadrica.

Esporremo, ora, brevemente il contenuto del presente Lavoro.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1974.

Nel n. 2, partendo dall'osservazione che in un (S, R) di seconda specie l'insieme delle coppie non ordinate di punti indipendenti e quello delle linee sono equipotenti, dimostreremo alcune proprietà numeriche e grafiche di (S, R).

Nel n. 3 si studieranno i sistemi rigati verificanti la seguente *condizione* W: *due linee distinte hanno al più due punti in comune ed è* $r \leq n$. In tale ipotesi mostreremo che risulta $r = n$ e che, fissato un blocco $t(\mathrm{P})$, una retta $\boldsymbol{a}$ di $t(\mathrm{P})$ ed un punto $\mathrm{A}(\neq \mathrm{P})$ su $\boldsymbol{a}$, l'insieme $t(\mathrm{P}) - \boldsymbol{a}$, rispetto alle rette di $\mathrm{F_P} - \{\boldsymbol{a}\}$ ed alle linee di $t(\mathrm{P})$ per A (private di A), costituisce un piano affine denotato con $\alpha(\mathrm{P}, \boldsymbol{a}, \mathrm{A})$. Si proverà poi che, dati due sistemi rigati di seconda specie verificanti la condizione W, se esitono due blocchi degeneri (l'uno del primo sistema, l'altro del secondo) che risultano isomorfi rispetto alle strutture geometriche indotte in essi dalle loro rette e dalle loro linee, allora i due sistemi sono isomorfi.

Nel n. 4 dimostreremo che, se (S, R) verifica la condizione W, con $q\,(= r - 1 = n - 1)$ dispari e se esiste un blocco degenere $t(\mathrm{V})$ di polo V tale che il piano affine $\alpha(\mathrm{V}, \boldsymbol{a}, \mathrm{A})$ (con $\boldsymbol{a} \in \mathrm{F_V}$ e $\mathrm{A} \in \boldsymbol{a} - \{\mathrm{V}\}$) sia desarguesiano, allora (S, R) risulta isomorfo al sistema rigato associato a una quadrica non singolare dell'$\mathrm{S}_{4,q}$.

2. Prime proprietà dei sistemi rigati di seconda specie

Nel seguito (S, R) denoterà sempre un sistema rigato finito di seconda specie, L la famiglia delle linee di (S, R) e $\{\mathrm{P}, \mathrm{Q}\}$ il sottoinsieme di S costituito dai punti P e Q che chiameremo coppia non ordinata (o più semplicemente coppia) di punti di S.

Indichiamo con I l'insieme delle coppie non ordinate di punti di S che risultano indipendenti. L'applicazione

$$f\colon\ \{\mathrm{P}, \mathrm{Q}\} \in \mathrm{I} \to l \in \mathrm{L}, \quad con \quad l = t(\mathrm{P}) \cap t(\mathrm{Q})$$

è biettiva in quanto in un (S, R) di seconda specie ogni coppia di punti indipendenti determina un'unica linea e, viceversa, ogni linea l può in un sol modo esprimersi come intersezione di due blocchi degeneri $t(\mathrm{P})$ e $t(\mathrm{Q})$, con P indipendente da Q. Ne segue che:

I) *Il numero delle coppie non ordinate di punti di* S *che risultano indipendenti uguaglia il numero delle linee di* (S, R).

Proviamo che:

II) *Il numero delle linee incluse nel blocco degenere* $t(\mathrm{P})$ *di polo* P *è* $(r-1)^2(n-1)$, *ove* r *è la cardinalità di una retta ed* n *quella di un fascio di rette*.

Dimostrazione. Il numero dei punti indipendenti da P è dato da $|\mathrm{S} - t(\mathrm{P})| = (r-1)^2(n-1)$ (cfr. [5], n. 3; [7], n. 4). Inoltre, preso un qualsiasi punto $\mathrm{Q} \in \mathrm{S} - t(\mathrm{P})$, la coppia $\{\mathrm{P}, \mathrm{Q}\}$ individua univocamente la linea $l = t(\mathrm{P}) \cap t(\mathrm{Q})$, la quale risulta inclusa in $t(\mathrm{P})$. Viceversa, se l è una linea inclusa in $t(\mathrm{P})$, essa è del tipo $t(\mathrm{P}) \cap t(\mathrm{Q})$ con $\mathrm{Q} \notin t(\mathrm{P})$, onde l'asserto.

Fissata una linea l restano univocamente determinati i due punti P e Q tali che $l = t(\mathrm{P}) \cap t(\mathrm{Q})$. Nel seguito diremo che P e Q sono i *punti base* della linea l. Proviamo che:

III) *In un sistema rigato di seconda specie il numero delle linee è dato da*:

$$|\mathrm{L}| = \frac{|\mathrm{S}|(r-1)^2(n-1)}{2} = \frac{r[(r-1)(n-1)+1](r-1)^2(n-1)}{2}.$$

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme costituito dalle coppie del tipo (l, P), dove l è una linea e P uno dei suoi punti base. Fissata l, P può variare in due soli modi, ne segue che il numero delle coppie distinte del suddetto tipo è $2|\mathrm{L}|$. Tale numero, però, può calcolarsi anche nel seguente altro modo: fissato un punto P, esistono $(r-1)^2(n-1)$ linee che ammettono P come punto base (cfr. Prop. II) e quindi il numero delle coppie in questione è $|\mathrm{S}|(r-1)^2(n-1)$, cioè si ha $2|\mathrm{L}| = |\mathrm{S}|(r-1)^2(n-1)$, onde l'asserto (cfr. [5], n. 3; [7], n. 3).

IV) *Fissati comunque due punti indipendenti* A *e* B, *per essi passano esattamente* $\frac{(n-1)n}{2}$ *linee distinte. I punti base di esse costituiscono la linea* $t(\mathrm{A}) \cap t(\mathrm{B})$.

Dimostrazione. Se A e B sono due punti indipendenti, essi individuano la linea $l = t(\mathrm{A}) \cap t(\mathrm{B})$, sulla quale vi sono n punti a due a due indipendenti. Detti H e K due di questi punti, essi individuano la linea $l' = t(\mathrm{H}) \cap t(\mathrm{K})$, la quale contiene A e B. Viceversa ogni linea per A e B ha i suoi due punti base sulla linea $l = t(\mathrm{A}) \cap t(\mathrm{B})$; ne segue che per A e B passano $\binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$ linee distinte.

V) *Se* $t(\mathrm{P})$ *è il blocco degenere di polo* P *e* A *e* B *due punti indipendenti di* $t(\mathrm{P})$, *le linee passanti per* A *e* B *che risultano incluse in* $t(\mathrm{P})$ *sono in numero di* $n-1$.

Dimostrazione. Se A e B sono due punti indipendenti di $t(\mathrm{P})$, essi si trovano su due rette distinte passanti per P: siano $\boldsymbol{s}$ ed $\boldsymbol{s}'$ tali rette. Fissiamo una retta $\boldsymbol{b}$ passante per B e distinta da $\boldsymbol{s}'$. Per A passa una, e una sola, retta $\boldsymbol{a}$, incidente $\boldsymbol{b}$; sia H il punto di incidenza. Notiamo che $\boldsymbol{a}$ è certamente distinta da $\boldsymbol{s}$, altrimenti per B passerebbero due rette distinte incidenti $\boldsymbol{s}$, date da $\boldsymbol{s}'$ e $\boldsymbol{b}$. La linea $l = t(\mathrm{P}) \cap t(\mathrm{H})$ passa per A e B ed è inclusa in $t(\mathrm{P})$. Ripetendo il suddetto procedimento per le $n-1$ rette passanti per B si ottengono $n-1$ linee del tipo richiesto, le quali sono distinte perché non hanno gli stessi punti base. Inoltre esse esauriscono l'insieme delle linee passanti per A e B e incluse in $t(\mathrm{P})$, in quanto una siffatta linea l, per la Prop. IV, è del tipo $l = t(\mathrm{P}) \cap t(\mathrm{K})$ con K dipendente sia da A che da B, da cui l'asserto.

VI) *Se* A *è un punto di un blocco degenere* $t(\mathrm{P})$ *distinto da* P *per esso passano esattamente* $(r-1)(n-1)$ *linee distinte incluse in* $t(\mathrm{P})$.

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{s}$ la retta di $t(\mathrm{P})$ cui A appartiene. Detta $\boldsymbol{s}'$ un'altra retta di $t(\mathrm{P})$ distinta da $\boldsymbol{s}$, per A e per un punto di $\boldsymbol{s}' - \{\mathrm{P}\}$ passano esattamente $n - 1$ linee distinte incluse in $t(\mathrm{P})$ (cfr. prop. V). Ricordando che i punti di $\boldsymbol{s}' - \{\mathrm{P}\}$ sono $r - 1$, si ottengono $(r - 1)(n - 1)$ linee distinte del tipo richiesto, le quali sono le uniche linee passanti per A e incluse in $t(\mathrm{P})$ (in quanto le linee di $t(\mathrm{P})$ unisecano $\boldsymbol{s}' - \{\mathrm{P}\}$). Si ha così l'asserto.

3. La condizione W

Diremo che un sistema rigato di seconda specie (S , R) verifica la *condizione* W, *se due linee distinte hanno al più due punti in comune e se è* $r \leq n$. Notiamo esplicitamente che in un siffatto sistema, comunque si assegnino tre punti a due a due indipendenti, se esiste una linea per essi, questa è unica.

Proviamo che:

I) *Se* (S , R) *verifica la condizione* W *risulta* $r = n$; *inoltre se* A, B, C *sono tre punti a due a due indipendenti di un blocco degenere* $t(\mathrm{P})$, *la linea per essi esiste ed è tutta inclusa in* $t(\mathrm{P})$. *Ne segue che la linea per tre punti a due a due indipendenti esiste se, e soltanto se, esiste un blocco degenere che li contiene.*

Dimostrazione. Diciamo $\boldsymbol{s}$ la retta di $t(\mathrm{P})$ cui C appartiene e ricordiamo (cfr. Prop. V, n. 2) che per A e B passano $n - 1$ linee distinte incluse in $t(\mathrm{P})$, ciascuna delle quali incontra $\boldsymbol{s} - \{\mathrm{P}\}$ in un punto. Due distinte di queste linee non possono intersecare $\boldsymbol{s}$ in uno stesso punto, altrimenti coinciderebbero avendo tre punti in comune. D'altra parte i punti di $\boldsymbol{s} - \{\mathrm{P}\}$ sono in numero di $r - 1 \leq n - 1$; quindi esiste una linea per A e B inclusa in $t(\mathrm{P})$, passante per C ed inoltre deve essere $r = n$.

D'ora in avanti supporremo costantemente, salvo esplicito avviso, che (S , R) soddisfi alla condizione W e porremo $r = n = q + 1$ (cfr. Prop. I).

Sia $t(\mathrm{P})$ il blocco degenere di polo P, $\boldsymbol{s}$ una retta di $t(\mathrm{P})$, A un punto di $\boldsymbol{s}$ distinto da P ed L (A) l'insieme delle linee passanti per A ed incluse in $t(\mathrm{P})$. Poniamo $\alpha = t(\mathrm{P}) - \boldsymbol{s}$, $\mathrm{Z} = \{\boldsymbol{t} - \{\mathrm{P}\}\}_{\boldsymbol{t} \in \mathrm{F}_{\mathrm{P}} - \{\boldsymbol{s}\}}$, $\mathrm{Z}' = \{l - \{\mathrm{A}\}\}_{l \in \mathrm{L(A)}}$ e $\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{Z} \cup \mathrm{Z}'$. Si ha che:

II) *Lo spazio geometrico* $(\alpha, \overline{\mathrm{R}})$ *risulta un piano affine d'ordine* $q \, (= r - 1 = n - 1)$.

Dimostrazione. Proviamo che, comunque si prendano due punti distinti T e Q di α, per essi passa uno, ed uno solo, elemento di $\overline{\mathrm{R}}$. Se T e Q sono dipendenti, detta $\boldsymbol{s}'$ la retta di $t(\mathrm{P})$ cui essi appartengono, l'unico elemento di $\overline{\mathrm{R}}$ cui appartengono entrambi è $\boldsymbol{s}' - \{\mathrm{P}\}$. Se, invece, T e Q sono indipendenti, detta l la linea passante per A, T e Q, certamente esistente ed inclusa in $t(\mathrm{P})$ (cfr. Prop. I), l'unico elemento di $\overline{\mathrm{R}}$ per Q e T è dato da $l - \{\mathrm{A}\}$. Mostriamo ora che, fissato un punto Q di α e un elemento $\boldsymbol{s}'$ di $\overline{\mathrm{R}}$ tale che $\mathrm{Q} \notin s'$, esiste uno ed un solo elemento di $\overline{\mathrm{R}}$ contenente Q e ad intersezione vuota con $\boldsymbol{s}'$. Il caso in cui $\boldsymbol{s}' \in Z$ è evidente, supponiamo quindi che s' appartenga a Z'. Sia $\boldsymbol{p}$ la retta di $t(P)$ cui Q appartiene e B il punto in cui tale retta interseca $\boldsymbol{s}'$. Fissato un punto H di $\boldsymbol{s}' - \{B\}$, per A, Q e H passa una, ed una sola, linea che risulta inclusa in $t(P)$ e quando H varia in $\boldsymbol{s}' - \{B\}$ si ottengono $q - 1$ linee distinte incluse in $t(P)$ per Q ed A. Detta l la rimanente linea per A e Q inclusa in $t(P)$, $l - \{A\}$ è l'unico elemento di $\bar{R}$ passante per Q e ad intersezione vuota con $\boldsymbol{s}'$. Poiché ogni elemento di $\bar{R}$ ha q punti, ed esistono evidentemente tre punti non allineati, si ha l'asserto.

Nel seguito per mettere in evidenza che il piano $(\alpha, \bar{R})$ è stato ottenuto fissando una retta $\boldsymbol{s}$ ed un punto $A \neq P$ porremo $(\alpha, \bar{R}) = \alpha(P, \boldsymbol{s}, A)$. In $\alpha(P, \boldsymbol{s}, A)$ diremo *speciale* la direzione delle rette di Z.

Fissata una retta $\boldsymbol{s}$ di $t(P)$ e un punto $A \neq P$ di $\boldsymbol{s}$, consideriamo una retta $\boldsymbol{s}'$ passante per A e distinta da $\boldsymbol{s}$. Sulla retta $\boldsymbol{s}'$ esistono q punti distinti da A, ognuno dei quali essendo indipendente da P, è punto base di un'unica linea inclusa in $t(P)$ e tale linea passa evidentemente per A. Due linee distinte del tipo precedente non possono avere punti in comune ad eccezione di A (altrimenti per un eventuale punto $B \neq A$ ad esse comune passerebbero due rette distinte incidenti $\boldsymbol{s}'$ e ciò è assurdo). Dunque le linee precedenti, che sono in numero di q, costituiscono un insieme di linee per A, incluse in $t(P)$, tali che comunque se ne prendano due, queste s'incontrano nel solo punto A. Esse individuano, quindi, nel piano $\alpha(P, \boldsymbol{s}, A)$ un fascio di rette parallele. Proviamo che:

III) *Se* $A \neq P$ *è un punto del blocco degenere* $t(P)$ *e* K *è un insieme di* q *linee per* A *tutte incluse in* $t(P)$, *tali che, comunque se ne prendano due, queste s'intersecano nel solo punto* A, *l'insieme dei punti base delle linee di* K, *al quale si aggreghi* A *e si tolga* P, *costituisce una retta passante per* A. *Ne segue anche che, se due linee di un blocco degenere* $t(P)$ *s'intersecano in due punti distinti, i punti base di tali linee, distinti da P, costiuiscono una coppia di punti indipendenti.*

Dimostrazione. Denotata con $\boldsymbol{s}$ la retta di $t(P)$ per A, sia δ la direzione speciale del piano affine $\alpha(P, \boldsymbol{s}, A)$, cioè quella costituita dalle rette $\{\boldsymbol{t} - \{P\}\}_{\boldsymbol{t} \in F_P - \{\boldsymbol{s}\}}$ di $\alpha(P, \boldsymbol{s}, A)$. In (S, R) ciascuna delle q rette $\boldsymbol{s}'$ per A, con $\boldsymbol{s}' \neq \boldsymbol{s}$, determina nel modo visto nel precedente capoverso un insieme K di cui all'enunciato e quindi una direzione di $\alpha(P, \boldsymbol{s}, A)$, diversa da δ, rette di (S, R) distinte per A determinando direzioni distinte di $\alpha(P, \boldsymbol{s}, A)$. In tal modo si ottengono dunque tutte le q direzioni di $\alpha(P, \boldsymbol{s}, A)$ distinte da δ. L'asserto segue se si osserva che ciascun insieme K di cui all'enunciato è una tale direzione.

IV) *Se due blocchi degeneri* $t(V)$ *e* $t(V')$, *appartenenti rispettivamente a due sistemi rigati di seconda specie* (S, R) *e* (S', R') *verificanti la condizione* W, *sono isomorfi, rispetto alle strutture geometriche indotte in essi dalle loro rette e dalle loro linee, allora sono isomorfi anche i due sistemi rigati.*

Dimostrazione. Sia f un isomorfismo tra $t(V)$ e $t(V')$. Indichiamo con F l'applicazione tra S ed S' che coincide con f nei punti di $t(V)$ e che opera sui rimanenti punti di S nel modo seguente: se P è un punto di S indipendente da V la linea $l = t(P) \cap t(V)$ è inclusa in $t(V)$; detta l' la linea corrispondente in f di l, sia P' il punto base di l' distinto da V', si porrà allora per definizione $P' = F(P)$. L'applicazione F è biunivoca e muta rette in rette. Infatti, se $\boldsymbol{t}$ è una retta di (S, R) non appartenente a F_V, essa interseca $t(V)$ in un punto $A \neq V$. I punti di $\boldsymbol{t} - \{A\}$ sono punti base di q linee incluse in $t(V)$ passanti per A e aventi a due a due il solo punto A in comune. Le q linee che ad esse corrispondono in f, essendo f biettiva, avranno a due a due il solo punto $A' = f(A)$ in comune. Ne segue che, per la Prop. III, l'insieme dei loro punti base distinti da V, a cui si aggreghi A', costituisce una retta $\boldsymbol{t}'$ passante per A' ed è evidentemente $\boldsymbol{t}' = F(\boldsymbol{t})$. Con ragionamento analogo si ha che anche F^{-1} muta rette in rette, cioè F risulta un isomorfismo tra (S, R) e (S', R').

4. Caratterizzazione dei sistemi rigati isomorfi ad una quadrica non singolare dell' $S_{4,q}$

Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non singolare di uno spazio di Galois $S_{4,q}$. Denotata con $\tilde{R}$ la famiglia delle rette di $\mathcal{Q}$ si ha che (cfr. [5], n. 2; [7], n. 2) lo spazio geometrico $(\mathcal{Q}, \tilde{R})$ è un sistema rigato, che dicesi associato alla quadrica $\mathcal{Q}$. Esso risulta di seconda specie e verifica evidentemente la condizione W. Notiamo che il blocco degenere polare di un punto di $\mathcal{Q}$ coincide col cono quadrico tangente alla quadrica in quel punto, mentre le linee sono tutte e sole le coniche di $\mathcal{Q}$ che risultano intersezione di $\mathcal{Q}$ con un piano la cui retta polare sia secante $\mathcal{Q}$. Ci proponiamo di indagare sotto quali condizioni aritmetiche e grafiche un sistema rigato di seconda specie è isomorfo a quello associato ad una quadrica non singolare dell'$S_{4,q}$.

Sia dunque (S, R) un sistema rigato di seconda specie verificante la condizione W. Supponiamo che $q\ (= r - 1 = n - 1)$ *sia un intero dispari* e che esista un blocco degenere $t(V)$ di polo V tale che il piano $\alpha(V, \boldsymbol{a}, A)$ (con $\boldsymbol{a} \subseteq t(V)$ e $A \in \boldsymbol{a} - \{V\}$) risulti desarguesiano e quindi coordinabile su un campo di Galois K_q. Poiché nel piano proiettivo ampliamento di $\alpha(V, \boldsymbol{a}, A)$, le linee non passanti per A, private dei punti che appartengono ad $\boldsymbol{a}$, qualora ad esse si aggreghi la direzione speciale δ di $\alpha(V, \boldsymbol{a}, A)$, sono dei $(q+1)$-archi, esse risultano delle coniche (cfr. [2], cap. 17, n. 174). Tali coniche, inoltre, costituiscono in $\alpha(V, \boldsymbol{a}, A)$ la famiglia delle parabole aventi lo stesso centro δ. Si consideri allora nello spazio di Galois $S_{4,q}$ costruito sul campo K_q una quadrica $\mathcal{Q}$ non singolare. Sia V' un punto di $\mathcal{Q}$ e C il cono quadrico di vertice V' tangente in V' a $\mathcal{Q}$. Sia A' un punto di C distinto da V', $\boldsymbol{a}'$ la retta di C cui A appartiene e τ il piano tangente a C in A'. Nell' S_3 in cui C è immerso, consideriamo un piano γ non passante né per A' né per V'. Esso non contiene la retta $\boldsymbol{a}'$ e la incontrerà in un sol punto H'; tale punto apparterrà alla retta $\boldsymbol{h}'$ in cui s'intersecano γ e τ. Proiettando $C - \boldsymbol{a}'$ su γ, assumendo A' come centro della proiezione, si ottiene una biezione tra $C - \boldsymbol{a}'$ ed il piano affine $\gamma - \boldsymbol{h}'$ coordinabile su K_q, che induce quindi tale struttura di piano affine desarguesiano in $C - \boldsymbol{a}'$; siffatta struttura coincidendo con quella di $\alpha(V', \boldsymbol{a}', A')$ (cfr. Prop. II n. 3). Ne segue che la famiglia delle coniche di C, non degeneri e non passanti per A′, private dei punti che appartengono ad $\boldsymbol{a}'$, costituiscono in $\alpha(V', \boldsymbol{a}', A')$ la famiglia delle parabole aventi tutte la direzione speciale δ' di $\alpha(V', \boldsymbol{a}', A')$, quindi se nel piano proiettivo ampliamento di $\alpha(V', \boldsymbol{a}', A')$ si aggiunge ad ognuna di tali parabole il punto improprio δ' si ottiene una famiglia di $(q+1)$-archi tangenti tutti nello stesso punto δ' alla retta impropria di $\alpha(V', \boldsymbol{a}', A')$.

I piani $\alpha(V, \boldsymbol{a}, A)$ e $\alpha(V', \boldsymbol{a}', A')$ sono isomorfi, essendo ambedue coordinabili sul campo di Galois K_q. Indichiamo con g un isomorfismo tra $\alpha(V, a, A)$ e $\alpha(V', a', A')$ che trasformi la direzione speciale δ del primo piano nella direzione speciale δ' del secondo piano. Tale isomorfismo, mutando rette in rette, trasforma le rette di $t(V) - \boldsymbol{a}$ nelle rette di $t(V') - \boldsymbol{a}'$ e le linee di $t(V)$ per A (private di A) nelle linee di $t(V')$ per A′ (private di A′). Della stessa proprietà gode evidentemente g^{-1}. D'altra parte g, in quanto isomorfismo, conserva i $(q+1)$-archi e quindi nel nostro caso le coniche; inoltre esso, essendo una biezione, deve trasformare rette tangenti ad una conica di $\alpha(V, \boldsymbol{a}, A)$ in rette tangenti alla conica corrispondente di $\alpha(V', \boldsymbol{a}', A')$. Ne segue, tenendo presente quanto detto alla fine del terzo e quarto capoverso del presente numero, che ogni linea di $t(V)$, non passante per A, privata del punto che appartiene ad $\boldsymbol{a}$, ha come corrispondente in g una linea di $t(V')$, non passante per A′ e privata del punto che sta su $\boldsymbol{a}'$, e viceversa.

Siano, ora, l' e l'' due linee di $t(V)$ non passanti per A e aventi in comune due punti P e H: supponiamo che $P \in \boldsymbol{a}$. Le linee l' e l'' private del punto P si trasformano mediante g in due linee m' e m'' di $t(V')$ private ciascuna del suo punto che appartiene ad $\boldsymbol{a}'$ e s'incontrano certamente nel punto $H' = g(H)$. Proviamo che i punti M′ e M″ di m' e m'' che stanno su $\boldsymbol{a}'$ (ambedue chiaramente distinti da A′) coincidono. Invero, se così non fosse, le linee m' e m'' s'incontrerebbero solo nel punto $H' \in t(V')$ e quindi nel piano $\alpha(V', \boldsymbol{h}', H')$ ($\boldsymbol{h}'$ essendo la retta di $t(V')$ cui H′ appartiene) le rette $m' - \{H'\}$ e $m'' - \{H'\}$, sarebbero parallele. Detta $m - \{H'\}$ la parallela per A′ alle rette $m' - \{H'\}$ e $m'' - \{H'\}$ del piano $\alpha(V', \boldsymbol{h}', H')$, la retta $m - \{A'\}$ di $\alpha(V', \boldsymbol{a}', A')$ sarebbe tangente alle parabole $m' - \{M'\}$ e $m'' - \{M''\}$ nello stesso punto H′. D'altra parte le parabole $l' - \{P\}$ e $l'' - \{P\}$ di $\alpha(V, \boldsymbol{a}, A)$ non possono avere in H la stessa retta tangente $l - \{A\}$, altrimenti in $\alpha(V, \boldsymbol{h}, H)$ la retta $l - \{H\}$ sarebbe parallela alle due rette incidenti $l' - \{H\}$ $l'' - \{H\}$. Ne segue che deve essere $M' = M''$. Proviamo, ora, che, se l' e l'' sono due linee di $t(V)$ non passanti per A e aventi in comune solo un punto P sulla retta $\boldsymbol{a}$, allora m' e m'' hanno anch'esse un sol punto in comune su a'. Infatti detta l la linea di $t(V)$ passante per P, D, E (dove D è un punto di l' ed E un punto di l'' tra loro indipendenti), essa ha in comune due punti sia con l' che con l'' e uno di tali punti sta su $\boldsymbol{a}$. Allora, per quanto detto precedentemente, segue che $m = g(l)$, m' e m'' devono incontrarsi in uno stesso punto di $\boldsymbol{a}'$ e l'asserto è dimostrato.

Possiamo infine considerare l'applicazione f, prolungamento della g (che è un'applicazione tra $t(V) - \boldsymbol{a}$ e $t(V') - \boldsymbol{a}'$) a tutto $t(V)$, definendola nel modo seguente: poniamo $V' = f(V)$, $f(P) = g(P)$ $\forall P \in t(V) - \boldsymbol{a}$ e facciamo corrispondere a un punto P di $\boldsymbol{a}$ il punto P' di $\boldsymbol{a}'$ per cui passa la linea di $t(V')$ corrispondente in g di una qualsiesi linea di $t(V)$ passante per P. L'applicazione così ottenuta è senz'altro biettiva ed inoltre essa è un isomorfismo tra i due blocchi degeneri $t(V)$ e $t(V')$ dotati della struttura geometrica indotta in essi dalle loro rette e dalle loro linee.

In definitiva rimane stabilito che:

I) *Assegnato* (S, R) *verificante la condizione* W *con* q *dispari, esista un blocco degenere* $t(V)$ *di polo* V, *tale che il piano affine* $\alpha(V, \boldsymbol{a}, A)$ (*con* $\boldsymbol{a} \in F_V$ *e* $A \in \boldsymbol{a} - \{V\}$) *sia desarguesiano* (*onde* $q = p^h$ *con* p *primo*). *Se* $t(V')$ *è il blocco degenere di polo* V' *del sistema rigato associato ad una quadrica* $\mathcal{Q}$ *non singolare dell'*$S_{4,q}$, *allora* $t(V)$ *e* $t(V')$ *sono isomorfi rispetto alle strutture geometriche indotte in essi dalle loro rette e dalle loro linee.*

Dalla Prop. I e dalla Prop. IV, n. 3 si ha che:

II) *Assegnato un sistema rigato di seconda specie* (S, R) *verificante la condizione* W, *con* $q\,(= r - 1 = n - 1)$ *dispari, se esiste un suo blocco degenere* $t(V)$ *di polo* V, *tale che il piano affine* $\alpha(V, \boldsymbol{a}, A)$ (*con* $\boldsymbol{a} \in F'_V$ *e* $A \in \boldsymbol{a} - V$) *sia desarguesiano, allora* (S, R) *risulta isomorfo al sistema rigato associato ad una quadrica non singolare dell'* $S_{4,q}$.

Bibliografia

[1] P. Dembowski, *Finite geometries*, Springer, Berlin, 1968.

[2] B. Segre, *Lectures on modern geometry*, Cremonese Ed., Roma, 1961.

[3] B. Segre, *Istituzioni di geometria superiore*, vol. I, II, III, « Ist. Mat. Univ., Roma », 1965.

[4] G. Tallini, *Strutture geometriche*, Parte I, Liguori Ed., Napoli 1970.

[5] G. Tallini, *Ruled graphic systems*, « Atti Conv. Geom. Comb. », Perugia 1971, 385–393.

[6] G. Tallini, *Sistemi grafici rigati*, Relaz. n. 8, « Ist. Mat. Univ., Napoli », 1971.

[7] G. Tallini, *Strutture d'incidenza dotate di polarità*, « Rend. Sem. Mat. e Fis., Milano », *41*, 1–41 (1971).

[8] J. Tits, *Sur la trialité et certains groupes qui s'en deduisent*, « Publ. Math., Paris », *2*, 14–60 (1959).