Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Leonida Eugenio Krivoshein, Kin-Vinh Leung, Demetrio Mangeron, Mehmet Namik Oguztöreli

Nouveaux problèmes concernant différentes classes d'équations intégro—différentielles non linéaires. I. Systèmes constitués de nouvelles conditions initiales non linéaires et d'équations non linéaires aux opérateurs héréditaires et aux dérivées partielles du premier ordre

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.2, p. 157–163.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_2_157_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Analisi matematica. — *Nouveaux problèmes concernant différentes classes d'équations intégro-différentielles non linéaires.* I. *Systèmes constitués de nouvelles conditions initiales non linéaires et d'équations non linéaires aux opérateurs héréditaires et aux dérivées partielles du premier ordre* (*). Nota di LEONIDA EUGENIO KRIVOSHEIN, KIN-VINH LEUNG, DEMETRIO MANGERON e MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

RIASSUNTO. — Gli Autori, continuando la serie dei proprii lavori rivolti ad approfondire i legami tra la teoria dei sistemi integro-differenziali non lineari [1], e, più specificamente, tra la teoria di certe classi di tali sistemi con operatori *polivibranti* [2], chiamati successivamente da vari scienziati «sistemi (o equazioni) di Mangeron» [3], e svariati campi di applicazioni odierne, espongono in ciò che segue un nuovo problema non lineare ai valori iniziali, «ben posto» nel senso di Hadamard, concernente una classe di equazioni integro-differenziali pur esse non lineari con operatori differenziali parziali di primo ordine e ne dimostrano, in certe condizioni, l'esistenza, l'unicità, la stabilità, proponendo anche un metodo di determinazione effettiva delle soluzioni approssimate ed il calcolo dell'errore commesso.

Gli Autori, sottolineando il fatto che i risultati conseguiti costituiscono una estensione apprezzabile non solo di alcuni loro risultati recenti [4], ma anche di tutt'una serie di risultati dovuti ad altri scienziati, ad esempio al prof. E. A. Barbashin ed alla Sua Scuola [5], si propongono di esporre in alcune delle loro Note susseguenti un elenco di risultati nuovi a proposito di vari problemi «ben posti» riguardo ai sistemi matematici con struttura composita [6], nell'ambito delle condizioni che generalizzano quelle di Goursat, Darboux, Dirichlet,....

1. Les Auteurs, tout en continuant la série de leurs travaux consacrés à l'approfondissement des liaisons entre la théorie des systèmes intégro-différentiels non linéaires [1] et surtout des systèmes intégro-différentiels non linéaires aux *opérateurs polyvibrants* [2], appelés par divers hommes de science «systèmes ou bien équations de Mangeron» [3], et les champs d'applications actuelles des plus variées [7], exposent dans ce qui suit un nouveau problème non linéaire aux valeurs initiales, «bien posé» au sens d'Hadamard, concernant une certaine classe d'équations intégro-différentielles non linéaires aux opérateurs différentiels partiels du premier ordre et démontrent l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions correspondantes et indiquent aussi une méthode de calcul effectif des solutions approximatives et l'évaluation des erreurs commises.

Les Auteurs, tout en soulignant le fait que les résultats ci-dessous constituent une extension de certains de leurs résultats récents antérieurs [4]

(*) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada.

(**) Nella seduta del 9 febbraio 1974.

et bien également de quelques–uns d'autres chercheurs, en particulier de ceux dûs à M.le prof. E. A. Barbashin et à son École [5], exposeront dans une série de leurs Notes prochaines nombre de problèmes « bien posés » concernant surtout différents systèmes mathématiques possédant la structure complexe [6].

2. Soit le problème non linéaire de valeurs initiales

$$u(x, \alpha) = \varphi\left[x, \int_a^x \int_\alpha^\gamma \mathrm{N}(x, \xi, \tau, u(\xi, \tau))\, d\tau\, d\xi\right], \tag{1}$$

concernant l'équation intégro–différentielle non linéaire à deux variables indépendantes et aux dérivées partielles du premier ordre

$$u'_t(x, t) = f\left[x, t, u(x, t), \int_a^x \int_\alpha^t \mathrm{M}(x, t, \xi, \tau, u(x, \tau), u(\xi, t))\, d\tau\, d\xi\right], \tag{2}$$

où les fonctions $\varphi(x, v_1)$, $\mathrm{N}(x, \xi, \tau, v_2)$, $\mathrm{M}(x, t, \xi, \tau, v_3, v_4)$, et $f(x, t, v_2, v_3)$ sont définies et continues dans le domaine

$$\mathfrak{D} = \{a \leq x, \xi \leq b, \alpha \leq t, \tau \leq \gamma, 0 \leq |v_i| \leq r_i, \quad i = \overline{1, 5}, \quad r_i = \text{const.}\}$$

et y satisfont aux conditions de Lipschitz par rapport aux variables dépendantes v_i. Soient $\mathrm{L}_\varphi(x)$, $\mathrm{L}_\mathrm{N}(x, \xi, \tau)$, $\mathrm{L}_{i\mathrm{M}}(x, t, \xi, \tau)$, $\mathrm{L}_{if}(x, t)$ $(i = 0, 1)$ les coefficients respectifs de Lipschitz, supposés bornés et intégrables dans $\mathfrak{D}$.

Après avoir transformé le problème (1), (2) dans l'équation intégrale

$$\begin{aligned} u(x, t) = {} & \varphi\left[x, \int_a^x \int_\alpha^\gamma \mathrm{N}(x, \xi, \tau, u(\xi, \tau))\, d\tau\, d\xi\right] + \\ & + \int_\alpha^t f\left[x, \theta, u(x, \theta), \int_a^x \int_\alpha^\theta \mathrm{M}(x, \theta, \xi, \tau, u(x, \tau), u(\xi, \theta))\, d\tau\, d\xi\right] d\theta \equiv \mathrm{A}[u] \end{aligned} \tag{3}$$

et avoir observé que la voie inverse qui conduit de l'équation intégrale (3) au système (1), (2) est elle aussi déterminée d'une manière univoque, on en déduit le suivant

THÉORÈME 1. *Le système intégro–différentiel non linéaire* (1), (2) *est équivalent à l'équation intégrale* (3) *dans le sens que la solution de cette équation est également solution du système* (1), (2) *et réciproquement.*

A la suite du fait que le traitement de l'équation (3) est plus simple que celui du système (1), (2), proposons nous d'établir une condition suffisante concernant l'existence et l'unicité, dans la classe de fonctions $\mathrm{C}^{0,1}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$, de la solution de l'équation intégrale non linéaire (3).

Choisissons pour norme la définition

$$\| \cdot \| = \max_{\mathfrak{D}} \| \cdot \| .$$

Après avoir pris deux fonctions arbitraires u_1 et u_2, telles que l'on aie $u_1 , u_2 \in C^{0,1} [a , b] \times [\alpha , \gamma]$, on en déduit de l'équation intégrale (3) l'inégalité

$$\begin{aligned} (4) \qquad & \| A [u_2] - A [u_1] \| \leq \Bigg\| L_\varphi (x) \int_a^x \int_\alpha^\gamma L_N (x , \xi , \tau) \, d\tau \, d\xi + \\ & + \int_\alpha^t \Big\{ L_{1f} (x , \theta) + L_{2f} (x , \theta) \int_a^x \int_\alpha^\theta [L_{1M} (x , \theta , \xi , \tau) + \\ & + L_{2M} (x , \theta , \xi , \tau)] \, d\tau \, d\xi \Big\} \, d\theta \Bigg\| \cdot \| u_2 - u_1 \| \equiv \\ & \equiv \| H (x , t) \| \cdot \| u_2 - u_1 \| = \beta \, \| u_2 - u_1 \| . \end{aligned}$$

D'où le suivant

THÉORÈME 2. *Si, dans les conditions ci-dessus, on a dans* (4) $\beta < 1$, *l'operateur* $A [\cdot]$ *réalise la condensation des représentations et applique par suite l'ensemble des fonctions appartenant à la classe* $C^{0,1}[a , b] \times [\alpha , \gamma]$ *du domaine* $\mathfrak{D}$ *dans l'une de ses parties, et, par conséquent, l'équation* (3) *et donc le problème* (1), (2) *possèdent d'après le principe du point fixe de Banach, dorénavant classique, une solution unique dans la classe indiquée, ayant la dérivée* $u'_t (x , t)$ *continue dans* $\mathfrak{D}$.

On aboutit à la construction effective de la solution du problème (1), (2) à la suite de l'application de la méthode des approximations successives, définies par les formules de récurrence

$$(5) \qquad u_n = A [u_{n-1}] , \qquad n = 1 , 2 , \cdots .$$

3\. Si on s'arrête à la n–ième solution approchée $u_n (x , t)$, la déviation correspondante s'exprime par

$$(6) \qquad r_n (x , t) \equiv u_n - A [u_n] .$$

Proposons nous maintenant d'évaluer dans le domaine $\mathfrak{D}$ la déviation entre les fonctions $u_n (x , t)$ et $u (x , t)$. On obtient de (3) et (5)

$$(7) \qquad \| u - u_n \| \leq \beta \| u - u_{n-1} \| \leq \cdots \leq \beta^n \| u - u_0 \| \leq \beta^n \| r_0 (x , t) \| : (1 - \beta) ,$$

où l'on a mis

$$r_0 (x , t) \equiv u_0 - A [u_0] .$$

D'où le suivant

THÉORÈME 3. *Afin que la valeur de la déviation* $\| u - u_n \|$ *soit, dans* $\mathfrak{D}$, *plus petite qu'un nombre positif donné* $\varepsilon > 0$, *le nombre* n *des itérations à* *exécuter dans le cadre de la méthode des approximations successives satisfait l'inégalité*

$$n \geq \{\ln [\varepsilon (1 - \beta) : \| r_0(x, t) \|]\} : \ln \beta . \tag{8}$$

4. Étudions dans ce numéro le problème de la stabilité des solutions du système intégro-différentiel non linéaire (1), (2). Supposons que la fonction $M(\cdot)$ est soumise aux perturbations telles que l'on aie

$$M[x, t, \xi, \tau, u(x, \tau), u(\xi, t)] - P[x, t, \xi, \tau, w(x, \tau), w(\xi, t)] = \\ = \psi(x, t, \xi, \tau, w(\xi, \tau)] .$$

Considérons maintenant le problème non linéaire de valeurs initiales

$$w(x, \alpha) = \varphi\left[x, \int_a^x \int_\alpha^\Upsilon N(x, \xi, \tau, w(\xi, \tau))\, d\tau\, d\xi\right], \tag{1+}$$

$w(x, t)$ étant la fonction inconnue, concernant l'équation intégro-différentielle non linéaire « perturbée »

$$w'_t(x, t) = f\left[x, t, w(x, t), \int_a^x \int_\alpha^t P(x, t, \xi, \tau, w(x, \tau), w(\xi, t))\, d\tau\, d\xi\right] . \tag{9}$$

Réduisons le système intégro-différentiel non linéaire (1+), (9) à l'équation intégrale équivalente

$$w(x, t) = \varphi\left[x, \int_a^x \int_\alpha^\Upsilon N(x, \tau, \xi, w(\xi, \tau))\, d\tau\, d\xi\right] + \tag{10}$$

$$+ \int_\alpha^t f\left[x, \theta, w(x, \theta), \int_a^x \int_\alpha^\theta P(x, \theta, \xi, \tau, w(x, \tau), w(\xi, \theta))\, d\tau\, d\xi\right] d\theta \equiv B[w]$$

et supposons que les fonctions qui figurent dans l'équation (10) sont elles aussi définies, continues et lipschitziennes dans le domaine $\mathfrak{D}$ et les coefficients respectifs de Lipschitz

$$L_\varphi(x), L_M(x, \tau, \xi), L_{if}(x, \theta), L_{iP}(x, \theta, \xi, \tau), \qquad i = 1, 2,$$

sont bornés et intégrables dans le même domaine.

On en déduit le suivant

THÉORÈME 4. *L'inégalité*

$$\mu = \left\| L_\varphi(x) \int_a^x \int_\alpha^t L_M(x, \tau, \xi)\, d\tau\, d\xi + \int_\alpha^t \Big\{ L_{1f}(x, \theta) + \right. \tag{11}$$

$$\left. + L_{2f}(x, \theta) \int_a^x \int_\alpha^\theta [L_{1P}(x, \theta, \xi, \tau) + L_{2P}(x, \xi, \tau)]\, d\tau\, d\xi \Big\} d\theta \right\| \equiv \| S(x, t) \| < 1$$

constitue une condition suffisante afin que l'équation intégrale (10) *et par suite le problème aux conditions initiales non linéaires et aux opérateurs héréditaires et dérivées partielles du premier ordre* (1 +), (9) *possèdent une solution unique dans le classe de fonctions* $C^{0,1}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$ *et cette solution peut être construite grâce à l'application de la méthode des approximations successives définies par la formule de récurrence* $w_n = B[w_{n-1}]$, $n = 1, 2, \cdots$.

A la suite du fait que l'on a

$$(12) \qquad \| u - w_n \| \leq \lambda + \mu^n \| R(x, t) \| : (1 - \mu), \; R(x, t) \equiv w_0 - B[w_0],$$

on en déduit sans trop de difficulté pour la norme de la déviation entre la solution $u(x, t)$ du problème (1), (2) et la solution du système perturbé (1 +), (9) l'inégalité

$$(13) \quad \| u - w \| \leq \left\| \int_\alpha^t L_{zf}(x, \theta) \left| \int_a^x \int_\alpha^\theta \psi[x, \theta, \xi, \tau, w(\xi, \tau)] \, d\tau \, d\xi \right| \right\| : (1 - \mu) = \lambda .$$

Remarques. 1) Dans l'hypothèse que les fonctions $\varphi(\cdot)$ et $f(\cdot)$ sont linéaires par rapport à $u(\cdot)$, c'est à dire le problème non linéaire considéré initiallement se réduit maintenant au problème linéaire que suit

$$(14) \qquad u(x, \alpha) = \varphi(x) + \int_a^x \int_\alpha^\gamma N(x, \xi, \tau) \, u(\xi, \tau) \, d\tau \, d\xi ,$$

$$(15) \quad u'_t(x, t) = f(x, t) + p(x, t) \, u(x, t) + \int_a^x \int_\alpha^t [M_1(x, t, \xi, \tau) \, u(x, \tau) + \\ + M_2(x, t, \xi, \tau) \, u(\xi, t)] \, d\tau \, d\xi ,$$

l'équation intégrale équivalente obtenue à la suite de l'application de la méthode des variations des paramètres au système intégro-différentiel (14), (15) sécrit comme suit:

$$(16) \qquad u(x, t) = \psi(x, t) + \\ + \int_a^x \int_\alpha^\gamma [S_1(x, t, \xi, \tau) \, u(x, \tau) + S_2(x, t, \xi, \tau) \, u(\xi, t)] \, d\tau \, d\xi .$$

A la suite du fait que l'équation intégrale (16) est linéaire, on en déduit le suivant

THÉORÈME 5. *Dans les conditions ci-dessus, l'équation intégrale linéaire* (16) *possède toujours une solution et une seule dans la classe des fonctions* $C^{0,1}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$ *et par suite le problème* (14), (15) *lui aussi est toujours résoluble dans les mêmes conditions.*

2) Les Auteurs exposerons dans quelques-unes de leurs prochaines Notes certains résultats acquis concernant les critères d'être « bien posés »

de différents problèmes aux valeurs initiales ou bien à la frontière généralisés pour différentes classes d'équations intégro–différentielles, dont certaines servent d'or et déjà pour modèles mathématiques de quelques phénomènes physiques, étudiés par M. B. Finzi [8], ou bien qui se trouvent exposés lors de ces dernières années dans la revue « *Meccanica* », fondée par cet illustre géomètre, dans le cadre de l'AIMETA, dont il en peut être bien justement fier, et qui, presque tous, puisent leur sève dans l'oeuvre indélébile de M.M. Picone [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] *a*) D. MANGERON et L. E. KRIVOSHEIN, *New methods of numerical calculation for the solutions of various integro–differential systems*, « Romanian J. Appl. Mechanics », 9, 1195–1221 (1964); *10*, 3–34 (1965); *b*) M. N. OĞUZTÖRELI, L. E. KRIVOSHEIN et D. J. MANGERON, *Systèmes mathématiques aux structures entremêlées. Nouveaux problèmes « bien posés » concernant une classe d'équations intégro–différentielles non linéaires avec arguments retardés*, « Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belgique », 5ᵉ sér., *58*, 733–739 (1972).

[2] *a*) D. MANGERON, *Problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. 6, *16*, 305–310 (1932); « Rend. Accad. sci. fis., mat., Napoli », ser. 2, *2*, 28–40 (1932); « Giorn. Mat. », *71*, 89–139 (1933); *b*) *Problèmes à la frontière pour les équations polyvibrantes d'ordre supérieur* », C.r. Acad. Sci., Paris », *204*, 94–96, 544–546, 1022–1024 (1937); *266*, 870–873, 976–978, 1050–1053, 1103–1106, 1121–1124 (1968), et d'autres encore.

[3] *a*) L. E. KRIVOCHÉINE, Dans le volume « *Trudy Tretiei Sibirskoi Konferentsii po Matematike i Mehanike* ». Tomskii Politehnicheskii Institut. Tomsk, 1964; *b*) L. E. KRIVOCHÉINE, *Sur un problème à la frontière pour les équations intégro–différentielles non linéaires de Mangeron*, « Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belgique », 5ᵉ sér., *59*, 362–37, (1973); *c*) M. N. OĞUZTÖRELI, *Sul problema di Goursat per un'equazione di Mangeron*, « Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. 8, *52*, 653–659 (1972); *d*) K. V. LEUNG et M. N. OĞUZTÖRELI, *Numerical solution of a Darboux problem for a polyvibrating equation of Mangeron*, I, « Bull. Soc. roy. Sci. Liège », 5,6, 269–275 (1973); *e*) G. BIRKHOFF, 209–210. Dans le volume *Approximations with special emphasis on spline functions*, Ed. I. J. Schoenberg, Academic Press, N.Y., 1969; *f*) G. BIRKHOFF et W. GORDON, *On the draftsman's and related equations*, « J. Approx. Theory », *1*, 199–208 (1968); *g*) F. E. ROSSI, *Il metodo di Mangeron nella risoluzione di certe equazioni alle derivate totali di Picone*, « Bull. Polytechn. Inst. Jassy », New Series, *12* (16), 1–2, 17–24 (1965); *h*) YU. M. BEREZANSKII, *Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators*, « Amer. Math. Soc. translation Monographs ». Annexe Chap. IV, p. 756, 787; *i*) S. EASWARAN, *A study on certain higher order partial differential equations of Mangeron*. A Doctoral Dissertation. The University of Alberta, Department of Mathematics, 1972.

[4] L. E. KRIVOCHÉINE, K. V. LEUNG, D. J. MANGERON et M. N. OĞUZTÖRELI, *Systèmes différentiels possédant la structure complexe*. I. *Existence, unicité, stabilité et approximation des solutions de certains systèmes intégro–différentiels non linéaires aux opérateurs différentiels ordinaires et hyperboliques*, « Bull. Acad. roy. Sci. Belgique », 5ᵉ sér., *58*, 11, 1307–1315 (1972).

[5] *a*) E. A. BARBASHIN, E. I. GERASCHENKO, V. A. TABUEVA et R. M. EIDINOV, *Metody analiza ustoichivosti sistem automaticheskogo regulirovania s peremennoi strukturoi*,

« Diskret., samonastraiv. i obuch. sistemy », M. « Nauka », 331 (1971); *b*) E. A. BARBASHIN, *Ob usloviah sohrarenia svoistva ustoichivosti reshenii integro-differentsial'nyh uravnenii*, « Izv. vysshih uchebn zavedenii. Matematika », *1*, 25–34 (1957).

[6] M. N. OĞUZTÖRELI et D. MANGERON, *Mathematical systems of mixed structures*. « Soviet Mathematics, Doklady (U.S.A.) », *12*, 187–191 et 118–120 (1971).

[7] K. V. LEUNG, D. MANGERON, N. OĞUZTÖRELI et R. B. STEIN, *Studies concerning a new class of nonlinear integro-differential equations occurring in certain electrical activities in neural networks*, II, « Utilitas Mathematics », *3*, 10 (1973).

[8] B. FINZI, *Introduzione all'aerodinamica relativistica*, « Missili. Riv. Assoc. Ital. Razzi », *7* (1), 7–18 (1965).

[9] M. PICONE, *a*) *La mia vita*. Tip. Eredi Dott. G. Bardi, Roma, 1972; *b*) MAURO PICONE, *Duodecim Doctorum Virorum Vitae et Operum Notitia*. Pontificia Academia Scientiarum. Città del Vaticano, A.D. MCMLXX, 117–146.