Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Saule Dzhunuzbekova, Leonida Eugenio Krivoshein, Kin-Vinh Leung, Mehmet Namik Oguztöreli

Problèmes concernant différentes classes d'équation intégro-différentielles non linéaires de Mangeron. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.2, p. 151–156.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_2_151_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Analisi matematica. — *Problèmes concernant différentes classes d'équation intégro-différentielles non linéaires de Mangeron* (*). Nota I di SAULE DZHUNUZBEKOVA, LEONIDA EUGENIO KRIVOSHEIN, KIN-VINH LEUNG e MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

RIASSUNTO. — Gli Autori, prendendo le mosse dalla ricca messe di risultati concernenti le equazioni polivibranti, introdotte dal prof. D. Mangeron [1] e chiamate poi da vari scienziati «equazioni di Mangeron» [2], espongono in ciò che segue alcuni teoremi riferentesi ad una classe di equazioni integro-differenziali non lineari in due variabili indipendenti di Mangeron e pertinenti all'esistenza, all'unicità, alla stabilità ed alla costruzione effettiva delle soluzioni approssimate di tali equazioni nell'ambito delle condizioni del tipo di Goursat, mentre in alcune delle loro Note susseguenti si esporrà una serie di risultati riguardanti vari problemi «ben posti» spettanti alle equazioni integro-differenziali non lineari di Mangeron con operatori polivibranti, conseguiti grazie ai lumi degli indelebili procedimenti di geometrizzazione e di computazione costruttiva dovuti rispettivamente agli Illustri Accademici Lincei Enrico Bompiani e Mauro Picone.

1. Les Auteurs, illuminés par les oeuvres indélébiles de géométrisation des systèmes d'équations des plus variés et de computation structurelle des plus efficaces des solutions de tels systèmes, dûs aux illustres Maîtres à nous tous, MM. Enrico Bompiani et Mauro Picone, exposent dans ce qui suit quelques théorèmes concernant l'existence, l'unicité, la stabilité et la construction effective des solutions approximatives d'une certaine classe d'équations intégro-différentielles non linéaires de Mangeron, dans le cadre des conditions de Goursat, tandis que ces mêmes Auteurs présenterons dans une série de leurs Notes prochaines nombre de problèmes «bien posés» relatifs aux différentes classes d'équations polyvibrantes, introduites par M.le prof. D. Mangeron [1], dont les fruits ont surpassés de beaucoup la promesse des fleurs et qui ont été appelées ensuite par de nombreux hommes de sciences «équations de Mangeron» [2].

2. Soit l'équation intégro-différentielle non linéaire appartenant à l'une des classes d'équations de Mangeron, à deux variables indépendantes et aux opérateurs hyperboliques,

$$u''_{xt} = f\left\{ x, t, u(x,t), \int_a^x \mathcal{K}\,[x, t, \xi, u(\xi, t), u'_\xi(\xi, t), u'_t(\xi, t)]\, d\xi \right\}, \tag{1}$$

(*) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada.
(**) Nella seduta del 9 febbraio 1974.

dont la fonction inconnue $u(x, t)$ est soumise aux conditions de Goursat, formulées par celui-ci il y a 70 années et devenues rapidement classiques,

$$u(a, t) = \varphi(t) \quad , \quad u(x, \alpha) = \psi(x) \quad , \quad \varphi(\alpha) = \psi(a) = p = \text{const.}, \tag{2}$$

où les fonctions $f(x, t, v_1, v_2)$ et $\mathcal{K}(x, t, \xi, v_3, v_4, v_5)$ sont définies et continues dans le domaine

$$\mathcal{D} = \{a \leq x, \xi \leq b, \alpha \leq t \leq \gamma, 0 \leq |v_i| \leq p, i = \overline{1, 5}\}$$

et satisfont dans ce domaine par rapport aux variables v_i les conditions de Lipschitz. Notons par $L_{if}(x, t)$ $(i = 1, 2)$ et $L_{kf}(x, t, \xi)$ $(k = 1, 2, 3)$ les coefficients de Lipschitz correspondants et supposons en outre que ces fonctions tant que les fonctions définies $\varphi(t)$ et $\psi(x)$ sont continues et les deux dernières de plus sont continuement différentiables dans $\mathcal{D}$.

Tout en mentionnant le fait que pour la résolution d'un tel problème, quoique abordé avec succès et largement discuté dans une série de mémoires insérés dans les *Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova* pour quelques classes d'équations intégro–différentielles non linéaires par l'un des Auteurs en collaboration avec M. D. Mangeron [3], les Auteurs ont fait appel à l'une des méthodes nouvelles, en cours d'application par le premier d'eux dans le cadre de l'élaboration de sa thèse, commençons, pour marquer les marches de la méthode élaborée, par l'introduction de la substitution

$$u''_{xt}(x, t) = v(x, t). \tag{3}$$

On en conclut que l'étude de la résolution du problème (1), (2) se réduit à l'étude de la résolution du système d'équations intégrales que suit:

$$u(x, t) = \mu(x, t) + \int_a^x \int_\alpha^t v(\eta, \theta)\, d\theta\, d\eta \tag{4}$$

et

$$\begin{aligned} v(x, t) = f\Big\{ & x, t, \mu(x, t) + \int_a^x \int_\alpha^t v(\eta, \theta)\, d\theta\, d\eta, \\ & \int_a^x K\Big[x, t, \xi, \mu(\xi, t) + \int_a^\xi \int_\alpha^t v(\eta, \theta)\, d\theta\, d\eta, \\ & \psi'(\xi) + \int_\alpha^t v(\xi, \theta)\, d\theta, \varphi'(t) + \int_a^\xi v(\eta, t)\, d\eta\Big]\, d\xi\Big\} \equiv A[v], \end{aligned} \tag{5}$$

où l'on a mis

$$\mu(x, t) \equiv \varphi(t) + \psi(x) - p.$$

Par conséquent, s'il existe une solution de l'équation intégrale non linéaire (4), l'existence d'une solution correspondante du problème (1), (2) en est assurée grâce à la relation de liaison (4).

Proposons nous d'établir une condition suffisante concernant l'éxistence et l'unicité, dans la classe de fonctions $C[a, b] \times [\alpha, \gamma]$ de la solution de l'équation intégrale non linéaire (5).

Choisissons pour norme la définition

$$\| \cdot \| = \max_{\mathfrak{D}} |\cdot| .$$

Après avoir pris deux fonctions arbitraires v_1 et v_2 telles que l'on aie $v_1, v_2 \in \mathfrak{D}$, on en déduit de l'équation intégrale (5) l'inégalité

$$\text{(6)} \qquad \| A[v_2] - A[v_1] \| \leq \Bigg\| L_{1f}(x, t)(b-a)(\gamma-\alpha) + L_{2f}(x, t) \Bigg| \int_a^x [L_{1K}(x, t, \xi)(\xi-a)(t-\alpha) + L_{2K}(x, t, \xi)(t-\alpha) + L_{3K}(x, t, \xi)(\xi-a)] \, d\xi \Bigg| \Bigg\| \cdot \| v_2 - v_1 \| \equiv \beta \cdot \| v_2 - v_1 \| .$$

D'où le suivant

THÉORÈME 1. *Si, dans* (6), *on a* $\beta < 1$, *l'opérateur* A *réalise la condensation des représentations et applique par suite l'ensemble des fonctions continues du domaine* $\mathfrak{D}$ *dans l'une de ses parties, et, par conséquent, l'équation* (5) *et donc le problème* (1), (2) *possèdent, d'après le principe du point fixe de Banach, dorénavant classique, une solution unique dans la classe* $C^{1,1}[a, b] \times [\alpha, \gamma]$, *ayant les dérivées* $u'_x(x, t)$, $u'_t(x, t)$, $u''_{xt}(x, t)$ *continues dans* $\mathfrak{D}$.

On aboutit à la construction effective de la solution du problème (1), (2) *à la suite de l'application de la méthode des approximations successives, définies par les formules de récurrence*

$$\text{(7)} \qquad v_n = A[v_{n-1}], \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

tout en tenant compte que l'on a

$$\text{(8)} \qquad u_n(x, t) = \mu(x, t) + \int_a^x \int_\alpha^t v_n(\eta, \theta) \, d\theta \, d\eta$$

et le processus des approximations $u_n(x, t)$ *converge pour* $x \to \infty$ *vers une solution unique* $u(x, t)$ *du problème* (1), (2) *ci-dessus.*

Posons, en effet,

$$\text{(9)} \qquad r_n(x, t) \equiv v_n(x, t) - A[v_n].$$

On obtient de suite

$$\text{(10)} \qquad \| v - v_n \| \leq \| r_n(x, t) \| : (1 - \beta)$$

et donc on a

$$\text{(11)} \qquad | u(x, t) - u_n(x, t) | \leq \rho_n \cdot | x - a | \cdot | t - \alpha | ,$$

où l'on a mis

$$\rho_n = \| r_n(x, t) \| : (1 - \beta) .$$

On aboutit à une autre expression de l'évaluation de l'erreur commise, en acceptant pour la solution du problème (1), (2) la solution approximative $u_n(x, t)$, si on prend le point de départ de l'évaluation

$$\| v - v_n \| \leq \beta^n \| v - v_0 \| \leq \beta^n \cdot \| r_0(x, t) \| : (1 - \beta). \tag{12}$$

On obtient dans ce cas

$$| u(x, t) - u_n(x, t) | \leq | x - a | \cdot | t - \alpha | \, \beta^n \cdot \| r_0(x, t) \| : (1 - \beta), \tag{13}$$

d'où l'unicité du problème (1), (2) contenue dans l'assertion finale du Théorème 1.

3. Étudions maintenant le problème de la stabilité de la solution du problème (1), (2) envers les perturbations des fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(x)$. Considérons donc le problème décrit par l'équation intégro-différentielle non linéaire de Mangeron (1) mais cette fois-ci ayant pour l'inconnue la fonction $w(x, t)$ et les conditions nouvelles

$$w(a, t) = \varphi_1(t) \quad , \quad w(x, \alpha) = \psi_1(x) \quad , \quad \varphi_1(\alpha) = \psi_1(a) = p_1^* , \tag{14}$$

où l'on a

$$| \varphi_1^{(i)}(t) - \varphi^{(i)}(t) | < \varepsilon_1 \quad , \quad | \psi_1^{(i)}(x) - \psi^{(i)}(x) | < \varepsilon_2 \quad , \quad i = 0 , 1 , \; | p_1^* - p | < \varepsilon_3 .$$

Le système résolvant d'équations intégrales correspondant au problème (1), (14) a la forme

$$w(x, t) = \mu_1(x, t) + \int_a^x \int_\alpha^t z(\eta, \theta) \, d\theta \, d\eta \, , \; \mu_1 \equiv \varphi_1(t) + \psi_1(x) - p_1^* \tag{15}$$

et

$$z(x, t) = f \Big\{ x , t , \mu_1(x, t) + \int_a^x \int_\alpha^t z(\eta, \theta) \, d\theta \, d\eta \, ,$$

$$\int_a^x \mathrm{K} \Big[x , t , \xi , \mu_1(\xi, t) + \int_a^x \int_\alpha^t z(\eta, \theta) \, d\theta \, d\eta \, , \tag{16}$$

$$\psi_1'(\xi) + \int_\alpha^t z(\xi, \theta) \, d\theta \, , \varphi_1'(t) + \int_a^\xi z(\eta, t) \, d\eta \Big] d\xi \Big\} \equiv \mathrm{B}[z] .$$

On en déduit de l'équation (16) le suivant

THÉORÈME 2. *Dans l'hypothèse que les conditions ci-dessus concernant l'existence, l'unicité et la construction effective de la solution du problème* (1), (2) *sont satisfaites, le problème « perturbé »* (1), (14) *possède lui aussi une solution* *unique dans ce même domaine $\mathfrak{D}$ et cette solution peut-être construite par la méthode des approximations successives*

$$z_n = \mathrm{B}\,[z_{n-1}]\,, \tag{17}$$

$$w_n(x\,,t) = \mu_1(x\,,t) + \int_a^x \int_\alpha^t z_n(\eta\,,\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\eta\,. \tag{18}$$

Proposons nous d'évaluer l'ordre de grandeur du voisinage des solutions $w(x\,,t)$ et $u(x\,,t)$, $(x\,,t) \in \mathfrak{D}$. On en déduit de (4) et (16)

$$\begin{aligned} \| v - z \| \leq \Big\| & \mathrm{L}_{1f}(x\,,t)\,|\,\mu(x\,,t) - \mu_1(x\,,t)\,| + \\ & + \mathrm{L}_{2f}(x\,,t)\,\Big|\int_t^x [\mathrm{L}_{1\mathrm{K}}(x\,,t\,,\xi)\,|\,\mu(\xi\,,t) - \mu_1(\xi\,,t)\,| + \\ & + \mathrm{L}_{2\mathrm{K}}(x\,,t\,,\xi)\,|\,\mu'_\xi(\xi\,,t) - \mu'_{1\xi}(\xi\,,t)\,| + \\ & + \mathrm{L}_{3\mathrm{K}}(x\,,t\,,\xi)\,|\,\mu'_t(\xi\,,t) - \mu'_{1_t}(\xi\,,t)\,|\,]\,\mathrm{d}\xi\,\Big|\,\Big\| : (1 - \beta) \equiv r \end{aligned} \tag{19}$$

et par suite on a en définitif

$$|\,u(x\,,t) - w(x\,,t)\,| \leq |\,\mu(x\,,t) - \mu_1(x\,,t) + r\,|\,x - a\,|\,(t - \alpha)\,. \tag{20}$$

D'où le suivant

THÉORÈME 3. *Si les perturbations des fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(x)$ et de leurs dérivées premières sont assez petites dans $\mathfrak{D}$ du point de vue des normes, les perturbations des solutions des problèmes correspondants* (1), (2) *et* (1), (14) *sont elles aussi de même ordre de petitesse.*

Remarques. 1) L'étude de la stabilité des solutions du problème (1), (2) peut être poursuivit dans des conditions plus générales, à savoir dans le cas où l'on considère, parallèlement aux perturbations des fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(x)$ des conditions (2), des perturbations des fonctions qui figurent dans le second membre de l'équation intégro-différentielle non linéaire (1). Notons que les raisonnements qui mènent aux conclusions similaires à ceux des Théorèmes 2 et 3 restent tels quels.

2) Les Auteurs exposerons dans quelques-unes de leurs prochaines Notes certains résultats acquis concernant les critères d'être « bien posés » de différents problèmes généralisés de Goursat-Darboux ou bien de problèmes à la frontière pour diverses classes d'équations intégro-différentielles non linéaires de Mangeron, aux opérateurs polyvibrants, polycaloriques ou bien encore aux structures complexes, tandis que nombre de détails algorithmiques et quelques-uns des résultats nouveaux dans l'ordre d'idées ci-dessus seront insérés dans le « *Bulletin de l'Institut Polytechnique de Jassy* ».

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. MANGERON, *Problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*, « Rend. Accad. sci. fis., mat., Napoli », (2), *2*, 28–40 (1932), et « Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », (6), *16*, 305–310 (1932). Voir aussi: *Problèmes à la frontière pour les équations polyvibrantes d'ordre supérieur*, « Comptes rendus, Acad. Sci. Paris », *204*, 94–96, 544–546, 1022–1024 (1937); *266*, 976–978, 1050–1053, 870–873, 1103–1106, 1121–1124 (1968), et d'autres encore.

[2] *a*) L. E. KRIVOCHÉINE, Dans le volume *Trudy Tretiei Sibirskoi Konferentsii po Matematike i Mehanike*, Tomskii Politehničeskii Institut, Tomsk, 1964, 6 p.; *b*) JU. M. BEREZANSKII, *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*. American Mathematical Society Translations of Mathematical Monographs, Vol. *17*, Providence, R. I., 1968. Voir Annexe au Chap. IV; *c*) S. EASWARAN, *A Study on certain higher order partial differential equations of Mangeron*. Doctoral Dissertation. Sci. Adviser Prof. M. N. Oğuztöreli. Dept. of Mathematics. The University of Alberta, Edmonton, Alberta, 1972; *d*) G. D. BIRKHOFF et W. GORDON, *On the draftsman's and related equations*, « J. Approx. Theory », *1*, 199–208 (1968); *e*) M. N. OĞUZTÖRELI et K.V. LEUNG, *Numerical solution of a Darboux problem for a polyvibrating equation of Mangeron*, I, « Bull. Soc. Roy. Sci. Liège », *5–6*, 269–275 (1973); *f*) L. E. KRIVOCHÉINE, *Sur un problème à la frontière pour les équations intégro-différentielles non linéaires de Mangeron*, « Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belgique », (5) *59*, 362–370 (1973s; *g*) M. N. OĞUZTÖRELI, *Su un problema misto concernente un'equazione polivibrante d'ordine superiore di Mangeron*, « Rend. Accad. Naz. dei XL », (4) *20*, 3–8 (1973).

[3] D. MANGERON et L. E. KRIVOCHÉINE, *Problemi concernenti varie equazioni integro-differenziali con operatori ereditari e derivate totali di Picone*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *33*, 226–266 (1963); *34*, 344–368 (1964); *35*, 341–364 (1965).

[4] *a*) K. V. LEUNG, D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI et R. B. STEIN, *On a class of nonlinear integro-differential equations*, II, III, « Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belgique », (5) *59*, 500–507 (1973); *b*) L. E. KRIVOCHÉINE, K. V. LEUNG, D. J. MANGERON et M. N. OĞUZTÖRELI, *Systèmes différentiels possédant la structure complexe. I. Existence, unicité, stabilité et approximation des solutions de certains systèmes intégro-différentiels non linéaires aux opérateurs différentiels ordinaires et hyperboliques*, « Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belgique », (5) *58*, n. 11, 1307–1315 (1972).