Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Elisa Grandori Guagenti

Su di un invariante integrale dei continui hamiltoniani

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.1, p. 65–71.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_1_65_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Meccanica. — *Su di un invariante integrale dei continui hamiltoniani* (*). Nota di ELISA GRANDORI GUAGENTI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — This paper deals with continuous mechanical systems, following hamiltonian formalism. It is shown that each continuous system has invariant integrals of the type of Poincaré's invariant integrals. Two examples are discussed: Thomson theorem in fluid dynamics is found again, then it is extended to magnetofluid dynamics.

PREMESSE

Negli ultimi anni il formalismo hamiltoniano si trova ad essere centro di rinnovato interesse, soprattutto per le informazioni che se ne possono trarre sulla stabilità dei sistemi dinamici. La teoria delle perturbazioni di Kolmogorov [1], Arnold [2] e Moser [3] e i loro teoremi sui tori invarianti prendono le mosse dalla formulazione hamiltoniana dei sistemi dinamici con un numero finito di gradi di libertà.

In questo ordine di idee mi sembra utile presentare l'estensione ai sistemi continui di alcuni risultati della teoria hamiltoniana.

È noto che il formalismo lagrangiano e hamiltoniano dei sistemi olonomi ad n gradi di libertà è estensibile ai sistemi continui conservativi (si veda ad esempio [4] [5] [6], [7]).

Siano infatti: x_0 la variabile tempo, $x_k (k = 1, 2, 3)$ le variabili spaziali; $x_\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$ l'insieme delle quattro coordinate; ψ_i le variabili di campo $(i = 1, 2, \cdots, n)$; $\psi_{i/\alpha}$ le derivate temporali e spaziali delle variabili di campo [1].

La densità lagrangiana $\mathfrak{L}(\psi_i, \psi_{i/\alpha}, x_\alpha)$ ubbidisce al principio di Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} \mathfrak{L} \, dV \, dt = 0 \tag{1}$$

dove V_3 è lo spazio fisico sede del continuo, t_1 e t_2 sono gli estremi dell'intervallo considerato; la variazione δ indica una variazione arbitraria delle ψ_i e della $\psi_{i/\alpha}$; la variazione δ non influisce sulle coordinate geometriche nè sul tempo. In particolare, perché valgae la (1), le variazioni devono annullarsi in ogni istante sul contorno σ di V_3 e dovunque negli istanti t_1 e t_2. Le equazioni

(*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1974.

(1) A volte indicheremo col punto la derivazione temporale

$$\dot{\psi}_i = \psi_{i/0} \, .$$

di Eulero–Lagrange, cui in tal modo la (1) dà luogo, sono

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{i/\alpha}} = 0. \tag{2}$$

Nella (2) è sottinteso il segno di sommatoria rispetto ad α, e così faremo in seguito per gli indici saturati; solo occasionalmente introdurremo esplicitamente il segno di sommatoria.

Introducendo la derivata funzionale della lagrangiana L, cioè

$$\frac{\delta L}{\delta \psi_i} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{i/k}}$$

dove è $L = \int_{V_3} \mathfrak{L}\, dV$, le (2) divengono

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i} \frac{\delta L}{\delta \psi_i} = 0$$

che sono formalmente identiche alle equazioni di Lagrange per i sistemi olonomi conservativi.

Assumendo poi come ulteriori n variabili indipendenti gli n momenti coniugati

$$\pi_i = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\psi}_i}$$

e indicando con $\mathcal{H}$ la densità hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi_i \dot{\psi}_i - \mathfrak{L}$$

si ottengono, sempre dal principio di Hamilton (1), le equazioni di Hamilton per i continui

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\psi}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_{i/k}} \\ \dot{\pi}_i &= -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_{i/k}} \right) \end{aligned} \right. \tag{3}$$

anch'esse formalmente identiche alle equazioni di Hamilton per i sistemi olonomi, se si scrivono

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\psi}_i &= \frac{\delta H}{\delta \pi_i} \\ \dot{\pi}_i &= - \frac{\delta H}{\delta \psi_i} , \end{aligned} \right.$$

dove è $H = \int_{V_3} \mathcal{H}\, dV$.

È noto inoltre che la natura del sistema di equazioni differenziali hamiltoniano è fondamentalmente connessa con le proprietà degli invarianti integrali. In particolare è nota l'importanza che riveste, per i sistemi olonomi conservativi, l'invariante integrale relativo di Poincaré

$$\oint \Sigma_i \, p_i \, \delta q_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

dove n sono i gradi di libertà del sistema, q_i e p_i sono al solito le variabili canoniche coniugate e l'integrale è esteso ad una linea chiusa C_1, luogo dei punti dello spazio delle fasi ad un certo istante t_1. L'integrale (4) è costante al variare del tempo, cioè assume lo stesso valore su ogni linea chiusa C in cui C_1 si trasforma durante l'evoluzione temporale del sistema. È noto che l'invarianza dell'integrale (4) può essere posta a fondamento della meccanica dei sistemi olonomi hamiltoniani, in quanto essa è condizione necessaria e sufficiente affinché il moto del sistema individuato dalle variabili q_i e p_i obbedisca alle ordinarie equazioni di Hamilton [8], [9].

Non mi risulta invece che sia stato indagato sull'analogo integrale legato all'evoluzione temporale dei continui.

Mostrerò ora come l'integrale

$$\oint \Sigma_i \, \pi_i \, \delta\psi_i$$

sia un invariante integrale relativo (2) per tutti i sistemi continui hamiltoniani, commentandone il significato nel caso delle piccole perturbazioni in un fluido perfetto e in un plasma ideale. Ritroverò così il teorema di Thomson.

UN INVARIANTE INTEGRALE

Consideriamo diverse soluzioni del sistema (3). Esse, per certe condizioni iniziali e al contorno, sono del tipo

$$\begin{cases} \psi_i = \psi_i(x_k, t) \\ \pi_i = \pi_i(x_k, t). \end{cases} \tag{5}$$

Fra le variazioni δ già introdutte consideriamo quelle che comportano il passaggio da una soluzione (5) ad un'altra infinitamente vicina, relativa allo stesso intervallo $[t_1 \, t_2]$ e allo stesso V_3; nella variazione si corrispondono valori di ψ_i e di π_i relativi allo stesso istante t e allo stesso punto $[x_k]$ di V_3.

Grazie ad una variazione come quella ora descritta, l'azione hamiltoniana Ω varia come segue

$$\delta\Omega = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} \mathfrak{L} \, dV \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_3} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_i} \delta\psi_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{i/\alpha}} \delta\psi_{i/\alpha} \right) dV \, dt$$

(2) Un invariante integrale dicesi relativo se è esteso ad una linea chiusa (o in generale ad un dominio chiuso ad n dimensioni se l'invariante è di ordine n); si dice invece invariante integrale assoluto se è esteso ad un qualunque arco di linea (vedi ad esempio [8]).

la quale, grazie alle equazioni di Lagrange (2), diviene

$$\delta\Omega = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{V_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{i/\alpha}}\,\delta\psi_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{i/\alpha}}\,\delta\psi_{i/\alpha}\right) \mathrm{d}V\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{V_3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{i/\alpha}}\,\delta\psi_i\right) \mathrm{d}V\,\mathrm{d}t .$$

Essa si può scrivere

$$\delta\Omega = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{V_3} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{i/0}}\,\delta\psi_i\right) \mathrm{d}V\,\mathrm{d}t + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{V_3} \operatorname{div}\mathbf{S}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

dove $\mathbf{S}$ è il vettore di componenti

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \psi_{i/k}}\,\delta\psi_i .$$

Il primo integrale temporale della (6) si esegue immediatamente; il secondo integrale di volume, nelle solite condizioni di regolarità, si trasforma nell'integrale del flusso di $\mathbf{S}$ esteso al contorno σ, di cui indichiamo con $\mathbf{N}$ la normale uscente. La (6) pertanto diviene

$$\delta\Omega = \int\limits_{V_3} [\pi_i\,\delta\psi_i]_{t_1}^{t_2}\,\mathrm{d}V + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\sigma} S_N\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t . \tag{6'}$$

Se le variazioni $\delta\psi_i$ sono tutte nulle in t_1 e in t_2 e sul contorno, i due integrali della (6') si annullano e si ha il principio di Hamilton.

Se invece lasciamo cadere la condizione che negli istanti t_1 e t_2 siano dovunque nulle le variazioni, mantenendo il loro annullarsi sul contorno, la variazione dell'azione hamiltoniana non è più nulla, ed è la variazione di Ω da una soluzione (5) ed un'altra infinitamente vicina, relativa a diverse condizioni iniziali, coincidente solo su σ. Essa è data da

$$\delta\Omega = \int\limits_{V_3} [\pi_i\,\delta\psi_i]_{t_1}^{t_2}\,\mathrm{d}V$$

e, indicando con ω la densità d'azione hamiltoniana, $\omega = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathfrak{L}\,\mathrm{d}t$,

$$\delta\omega = [\pi_i\,\delta\psi_i]_{t_1}^{t_2} . \tag{7}$$

La variazione $\delta\omega$ è una variazione puntuale, cioè eseguita per ogni prefissata terna $[x_k]$. Vale la pena soffermarsi sul suo significato.

L'evoluzione temporale del sistema in ogni punto è rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} \psi_i = \psi_i(t) \\ \pi_i = \pi_i(t) \end{cases} \tag{8}$$

ottenute dalle (5) per ogni prefissata terna $[x_k]$. Le (8) si interpretano geometricamente come varietà ad una dimensione nello spazio delle ψ_i, π_i, spazio a $2n$ dimensioni che si riduce ad un ordinario spazio delle fasi, i cui punti dipendono dal solo parametro t. Chiameremo traiettorie puntuali del sistema le linee V_1 di tale spazio rappresentate dalle (8). La densità ω è calcolata lungo ogni traiettoria puntuale. La variazione δ già illustrata implica localmente delle variazioni da una V_1 ad un'altra: è la variazione della densità d'azione hamiltoniana da una traiettoria puntuale ad un'altra infinitamente vicina (anch'essa possibile in $[x_k]$ per diversi valori iniziali di ψ_i e di π_i) e non coincidente agli estremi perché nella variazione non sono nulle le $\delta\psi$ estreme; anzi proprio da esse dipende il valore di $\delta\omega$ secondo le (7).

Sia ora C_1 una curva chiusa dello spazio delle fasi i cui punti rappresentino diverse situazioni del continuo in un punto $[x_k]$ e in uno stesso istante t_1 e, sempre nello stesso spazio delle fasi, tutte le traiettorie puntuali V_1 che partono dai diversi punti di C_1: esse formano un tubo di traiettorie; ognuna di esse è una effettiva traiettoria puntuale (per diverse condizioni iniziali) e quindi su ognuna di esse vale la (7); la variazione δ sia proprio quella che fa passare dall'una all'altra di esse. Si integri la (7) sull'insieme delle traiettorie V_1 nell'intervallo di tempo $[t_1 t_2]$. Si ottiene

$$\int \delta\omega = 0$$

perché la variazione della densità d'azione quando si torna alla traiettoria di partenza è nulla; e quindi, per la (7),

$$\oint_{t_1} \Sigma_i \pi_i \, \delta\psi_i = \oint_{t_2} \Sigma_i \pi_i \, \delta\psi_i \tag{8}$$

dove il primo integrale è esteso alla curva C_1 e il secondo alla curva C_2 in cui C_1 si è trasformata all'istante t_2. La (8) mostra che l' $\oint \Sigma_i \pi_i \, \delta\psi_i$ è un invariante integrale relativo di ogni sistema continuo hamiltoniano.

DUE ESEMPI

Si consideri un fluido perfetto in cui le piccole perturbazioni si propaghino adiabaticamente. Siano $[x_k]$ le coordinate di una particella nella posizione di riposo. Si indichi con ρ_0 la densità del fluido in tale punto; con $\boldsymbol{s}$ il vettore spostamento di ogni particella in ogni istante dalla sua posizione di equilibrio $[x_k]$, con c_0 la velocità del suono nel fluido imperturbato.

Le variabili canoniche di campo sono le tre componenti $s_1(x_k, t)$, $s_2(x_k, t)$, $s_3(x_k, t)$ del vettore $\boldsymbol{s}$ e i loro momenti coniugati $\rho_0 \dot{s}_1(x_k, t)$, $\rho_0 \dot{s}_2(x_k, t)$, $\rho_0 \dot{s}_3(x_k, t)$.

La densità lagrangiana si trova essere (vedi ad esempio [5], [10])

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \rho_0 [\dot{s}^2 - c_0^2 (\operatorname{div} \boldsymbol{s})^2].$$

È essenziale rilevare che la suddetta lagrangiana corrisponde alla descrizione del fluido dal punto di vista lagrangiano non da quello euleriano. Le coordinate $[x_k]$ sopra definite individuano una ben determinata particella.

La traiettoria V_1 che nel paragrafo precedente abbiamo chiamato traiettoria puntuale è, nello spazio delle fasi, la traiettoria di una particella materiale. Le traiettorie rappresentanti possibili diverse evoluzioni della stessa particella sono materializzate nel fluido nelle effettive traiettorie delle altre particelle.

La variazione δ porta da una effettiva traiettoria di una particella ad una altra infinitamente vicina.

L'invariante integrale (8) in questo caso diviene

$$\rho_0 \oint \sum_1^3 \dot{s}_k \delta s_k . \tag{9}$$

Se riguardiamo come noto il campo delle velocità nel fluido, l'integrale (9) diviene un integrale nello spazio fisico V_3 esteso ad una linea materiale di particelle contemporanee. Esso è la circolazione nel fluido.

Si riconosce nell'invarianza dell'integrale (9) il ben noto teorema di Thomson: in un fluido perfetto soggetto a forze di massa conservative (e cioè nelle ipotesi hamiltoniane) la circolazione lungo una linea chiusa formata sempre dalle stesse particelle è costante (3).

b) Si consideri ora un fluido perfettamente conduttore immerso in un campo magnetico. In una teoria linearizzata dalle piccole perturbazioni si propagano secondo le ben note equazioni d'onda.

La densità lagrangiana da cui esse discendono è [11]

$$\mathfrak{L} = \frac{\rho_0}{2}\left[\dot{s}^2 - (c_0^2 + A_0^2)(\operatorname{div} \boldsymbol{s})^2 - A_0^2\left(\frac{\partial s}{\partial x_3}\right)^2 + 2\, A_0^2 \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \operatorname{div} \boldsymbol{s}\right]$$

dove A_0 è la velocità di Alfvén, cioè, indicando al solito con μ la permeabilità magnetica (costante) e con B_0 il campo magnetico imperturbato, $A_0 = B_0/\sqrt{4\pi\mu\rho_0}$; x_3 è la direzione (costante) del campo magnetico imperturbato.

L'invariante integrale (9) legato a suddetta lagrangiana è

$$\rho_0 \oint \sum_1^3{}_k \dot{s}_k \, \delta s_k .$$

Per le stesse considerazioni fatte nel caso precedente esso è la circolazione lungo una linea chiusa di particelle materiali contemporanee e la sua invarianza coincide con il teorema di Thomson.

Possiamo pertanto affermare che il teorema di Thomson vale non solo nella ordinaria dinamica dei fluidi perfetti, ma anche nella teoria linearizzata dei fluidi conduttori ideali.

(3) Alla stessa conclusione si può giungere attraverso la ordinaria formulazione hamiltoniana per i sistemi olonomi, considerando il moto di una singola particella e basandosi sull'invariante integrale di Poincaré sived a ad esempio [9], [10].

BIBLIOGRAFIA

[1] KOLMOGOROV A. N., *On the conservation of Quasi–Periodic Motions for a Small Change in the Hamiltonian Function*, « Dokl. Akad. Nauk. », *98*, 4 (1954).

[2] ARNOLD V. I. e AVEZ A., *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin W. A., Inc., 1968.

[3] MOSER J., *On Theory of Quasi–Periodic Motion*, Siam Review, 1966.

[4] TER HAAR D., *Elements of Hamiltonian Mechanics*, North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1961.

[5] GOLDSTEIN H., *Meccanica classica*, Zanichelli, Bologna 1961.

[6] SCHIFF L. I., *Quantum Mechanics*, McGraw Hill, New York, 1949.

[7] UDESCHINI P., *Sulla forma hamiltoniana della teoria einsteiniana della gravitazione*, « Rend. Sem. Mat. Fis. », Milano 1968.

[8] WHITTAKER E. T., *Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Dover Publ., New York, 1944.

[9] GANTMACHER F., *Lectures in Analytical Mechanics*, MIR Publ., Moscow, 1970.

[10] CARTAN E., *Leçons sur les invariànts intégraux*, Hermann, Paris, 1971.

[11] MATTEI G., *The Lagrangian and Hamiltonian Formulation for Magneto–Fluid–Dynamics Waves*, « Boll. U M.I. », *4*, 7 (1973).