Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pietro Benvenuti, Raffaele Balli

Risolubilità per quadrature del problema del moto di un solido soggetto a forze di potenza nulla

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.1, p. 62–64.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_1_62_0>

Meccanica. — *Risolubilità per quadrature del problema del moto di un solido soggetto a forze di potenza nulla.* Nota di PIETRO BENVENUTI e RAFFAELE BALLI, presentata (*) dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — The problem of determination of the motion of a rigid body with a fixed center of gravity and subject to null-work forces, is equivalent to the determination of the motion of a rigid body subject to Newton forces of attraction to the second approximation, and it is therefore resolvable by quadratures.

1. Si riconosce la validità di quattro integrali primi algebrici, indipendenti tra loro, delle equazioni del moto attorno ad un punto fisso di un corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla del tipo considerato da G. Grioli [3] e da H. Goldstein [4]; ne segue che il problema della determinazione del moto è risolubile mediante quadrature.

Il procedimento seguito consiste nel confronto tra i moti dinamicamente possibili di un corpo rigido, con il baricentro fisso, soggetto a forze di potenza nulla, e quelli dello stesso corpo rigido soggetto ad una opportuna sollecitazione di tipo newtoniano, valutata in seconda approssimazione: i moti di queste due classi differiscono per una rotazione uniforme. L'integrale primo, scoperto da F. De Brun [1] per il moto del corpo rigido soggetto a forze newtoniane, si traduce in un integrale primo algebrico, indipendente dai tre già considerati da G. Grioli [5] per il moto del corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla.

2. Sia $\mathcal{C}$ un corpo rigido, con il baricentro G fisso, soggetto in un riferimento inerziale $\mathfrak{R}$ alle forze di attrazione newtoniana esplicate da un corpo puntiforme fisso C. È noto che le forze del campo gravitazionale, valutate in seconda approssimazione, hanno momento totale rispetto a G pari a $\eta\vec{c}\times\sigma(\vec{c})$, essendo $\tilde{c} =$ vers CG, σ l'omografia centrale di inerzia del corpo $\mathcal{C}$ ed essendo η una costante positiva legata al coefficiente gravitazionale, alla massa del corpo attraente ed alla sua distanza da G (Cfr. E. Leimanis [7], § 18). I moti del corpo $\mathcal{C}$ sono quindi regolati in $\mathfrak{R}$ dal sistema di equazioni:

$$
(1) \qquad \begin{aligned} &\sigma(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times\sigma(\vec{\omega}) = \eta\vec{c}\times\sigma(\vec{c}) \\ &\dot{\vec{c}} + \vec{\omega}\times\vec{c} = 0\,. \end{aligned}
$$

Questo sistema ammette gli integrali primi classici della energia, del momento assiale delle quantità di moto e del modulo di $\vec{c}$. Oltre a questi, su-

(*) Nella seduta del 12 gennaio 1974.

siste l'integrale primo scoperto da F. De Brun [1]:

$$\sigma(\vec{\omega})\cdot\sigma(\vec{\omega}) - \eta R\sigma(\vec{c})\cdot\vec{c} = \text{cost.} \tag{2}$$

essendo $R\sigma$ l'omografia complementare di σ. La validità di questi quattro integrali primi consente di risolvere il sistema (1) mediante quadrature; cio è stato fatto da G. Kobb [2] e da E. I. Harlamova [6].

Sia ora $\mathcal{R}'$ il riferimento che si muove rispetto ad $\mathcal{R}$ di moto rotatorio uniforme attorno alla retta CG con velocita angolare $\vec{H} = \sqrt{\eta}\,\vec{c}$; in tale riferimento il corpo $\mathcal{C}$ è soggetto, oltre che alle forze effettive, alle forze apparenti. Il momento rispetto a G delle forze centrifughe risulta pari a $\sigma(\vec{H})\times\vec{H}$ e si oppone quindi al momento delle forze newtoniane, per la particolare scelta della velocità angolare di trascinamento $\vec{H}$. Indicata con $\vec{\omega}'$ la velocità angolare di $\mathcal{C}$ nel suo moto in $\mathcal{R}'$, il momento delle forze del Coriolis ha la seguente espressione:

$$\sigma(\vec{\omega}')\times\vec{H} - \vec{\omega}'\times\sigma(\vec{H}) + \sigma(\vec{\omega}'\times\vec{H}) \equiv \lambda\vec{\omega}'\times\vec{H} - 2\,\vec{\omega}'\times\sigma(\vec{H}) \tag{3}$$

essendo λ la traccia della omografia σ. I moti del corpo $\mathcal{C}$ sono quindi regolati in $\mathcal{R}'$ dal sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} &\sigma(\dot{\vec{\omega}}') + \vec{\omega}'\times\sigma(\vec{\omega}') = \lambda\vec{\omega}'\times\vec{H} - 2\,\vec{\omega}'\times\sigma(\vec{H}) \\ &\dot{\vec{H}} + \vec{\omega}'\times\vec{H} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Queste sono appunto le equazioni di moto attorno ad un punto fisso di un corpo rigido, soggetto alle forze di potenza nulla considerate da G. Grioli e da H. Goldstein.

Viceversa, fissato il vettore $\vec{H}$, il sistema di equazioni (4) può essere inteso come quello che regola, in un riferimento ruotante con velocità angolare $\vec{H}$, il moto di un corpo rigido sospeso per il suo baricentro e soggetto nel riferimento inerziale ad una sollecitazione newtoniana per la quale sia $\sqrt{\eta}\,\vec{c} = \vec{H}$. Si riconosce così che i moti di un corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla possono essere ottenuti da quelli di un corpo rigido soggetto ad una sollecitazione newtoniana, componendo questi ultimi con una rotazione uniforme. Tutti i risultati conosciuti sul moto del corpo rigido soggetto ad una sollecitazione newtoniana, possono così essere tradotti per il moto del corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla; in particolare i procedimenti, studiati da G. Kobb [2] e da E. I. Harlamova [6] per ricondurre alle quadrature la determinazione del moto di un corpo rigido soggetto a forze newtoniane, si traducono banalmente per la determinazione mediante quadrature del moto di un corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla.

Un modo diretto, per mostrare che i moti del corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla possono essere determinati mediante quadrature, è quello di riconoscere la validità di quattro integrali primi algebrici indipendenti tra loro per il sistema (4). Questi integrali primi possono per altro essere ottenuti trasformando quelli validi per il sistema (1); ai tre integrali primi già considerati da G. Grioli:

$$\sigma(\vec{\omega}') \cdot \vec{\omega}' = \text{cost.}$$

$$\sigma(\vec{H}) \cdot (\vec{\omega}' + \vec{H}) = \text{cost.}$$

$$\vec{H} \cdot \vec{H} = \text{cost.}$$

si aggiunge in questo modo un quarto, analogo all'integrale di De Brun:

$$\sigma(\vec{\omega}' + \vec{H}) \cdot \sigma(\vec{\omega}' + \vec{H}) - \vec{H} \cdot R\sigma(\vec{H}) = \text{cost.}$$

La validità di quest'ultimo integrale primo è del resto verificabile con facilità se si tiene conto della identità (3).

3. Notiamo infine che il confronto, sul quale si basa questa Nota, può essere esteso allo studio del moto dei corpi rigidi con un punto fisso $O \neq G$ soggetti, oltre che al peso, a forze di potenza nulla del tipo indicato quando $\vec{H}$ è verticale. Questi moti differiscono per un moto rotatorio uniforme da quelli dei corpi rigidi vincolati nello stesso modo e soggetti a forze di tipo newtoniano valutate in seconda approssimazione. Si riconosce così, per esempio, che quei moti, come quest'ultimi, possono essere determinati per quadrature oltre che nel caso discusso (di Eulero–Poinsot) nel caso giroscopico (di Lagrange–Poisson), mentre non si presenta un caso analogo a quello della Kowalevski (cfr. Leimanis [7], § 18.3).

Riferimenti bibliografici

[1] F. de Brun, *Rotation kring fix punkt*, «Öfvers. Kongl. Svenska Vetenskaps–Akad. Förhandl. Stockolm», *7* (1893).

[2] G. Kobb, *Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe*, «Bull. Soc. Math. France», *23* (1895).

[3] G. Grioli, *Moto attorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla*, «Rend. Mat.» (5), *6* (1947).

[4] H. Goldstein, *The classical motion of rigid charged body in a magnetic field*, «Am. Jour. of Physics», *19* (1951).

[5] G. Grioli, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, «Rend. Sem. Padova» *27* (1957).

[6] E. I. Harlamova, *Sul moto di un corpo rigido con un punto fisso in un campo di forze newtoniano centrale* (Russo), «Izvestiya Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk», *6* (1959).

[7] E. Leimanis, *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point*, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 7, Springer-Verlag (1965).