Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Fontana, Guerino Mazzola

Sur les anneaux et schémas co—discrets

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.1, p. 45–51.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_1_45_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

Geometria algebrica. — *Sur les anneaux et schémas co-discrets* (*).

Nota di MARCO FONTANA (**) e GUERINO MAZZOLA (***), presentata (****) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si studiano anelli in cui ogni ideale proprio è radicale; si ottengono per globalizzazione strutture schematiche per le quali vengono dimostrate alcune basilari proprietà locali e globali.

INTRODUCTION

Dans l'étude des anneaux de Jacobson, à savoir les anneaux tels que

(J) tout idéal radical est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent [1],

récemment, dans [4], [5] et [6], quelques types d'anneaux «à idéaux spéciaux» ont été caractérisés et classifiés en partie.

Plus précisément, par « anneaux à idéaux spéciaux » nous entendons des anneaux qui satisfont à une des propriétés suivantes:

(P′) tout idéal propre est primaire;
(P) tout idéal propre est premier;
(M) tout idéal propre est maximal;
(R) tout idéal propre est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent (i.e. tout idéal propre est radical);
(R′) tout idéal propre est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent;
(RP) tout idéal propre a un radical premier;
(J′) tout idéal est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

Le tableau d'implications suivant est immédiat

$$\begin{tikzcd}
(RP) & & \\
(P') \arrow[u, Rightarrow] & (R) & \\
(P) \arrow[u, Rightarrow] & (R') \arrow[u, Rightarrow] & (J) \\
(M) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & & (J') \arrow[u, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

(*) Tous les anneaux sont supposés commutatifs et possédant un élément unité, tous les homomorphismes d'anneaux sont supposés transformer l'élément unité en l'élément unité.

(**) Financé par « Il Consiglio Nazionale delle Ricerche ».

(***) Financé par « Kredit zur Förderung des akademischen Nachwuchses, Erziehungsdirektion des Kt. Zürich ».

(****) Nella seduta del 12 gennaio 1973.

Les anneaux qui satisfont à la propriété (M) ont été caractérisés et classifiés dans [6].

Dans [4], il a été démontré que, pour tout anneau A, les affirmations suivantes sont équivalentes:

(i) A satisfait à la propriété (P);
(ii) A satisfait à la propriété (M).

Dans la première partie de cette Note, les anneaux qui vérifient la propriété (J′) sont caractérisés.

En cours de route, nous démontrons, dans le cas réduit, que les affirmations suivantes sont équivalentes:

(i) A satisfait à la proprieté (J′);
(jj) A satisfait à la propriété (R);
(jjj) A satisfait à la propriété (R′).

Les anneaux réduits qui vérifient une des propriétés équivalentes précédentes seront appelés *co-discrets*, terminologie qui sera justifiée par la structure schématique de leur spectre.

A l'aide du théorème de caractérisation (voir Théorème 6), nous classifions, sous certaines hypothèses de finitude, les anneaux qui satisfont à la propriété (J′), en précisant en outre sous quelle condition simple sur la cardinalité du spectre on a:

$$(\mathrm{P}) \Longleftrightarrow (\mathrm{M}) \Longleftrightarrow (\mathrm{R}) \Longleftrightarrow (\mathrm{R}') \Longleftrightarrow (\mathrm{J}').$$

Nous donnons un exemple typique de la structure des anneaux qui vérifient la propriété (J′). Cet exemple montre, en même temps, la non trivialité de la structure de cette classe d'anneaux et l'impossibilité d'une amélioration des conditions du théorème de caractérisation.

Dans la deuxième partie, nous donnons une caractérisation schématique des spectres d'anneaux co-discrets, à l'aide de la notion d'image schématique de morphismes. Plus généralement, la notion de schémas co-discrets, non nécessairement affines, est introduite. Des propriétés de passage du cas global au cas local, et inversement, sont étudiées.

1. Caractérisations algébriques

Lemme 1. *Soit* A *un anneau qui satisfait à la propriété* (R). *Alors tout élément régulier est inversible.*

En effet, soit x régulier, alors $x\mathrm{A} = \sqrt{x\mathrm{A}} = \sqrt{x^2\mathrm{A}} = x^2\mathrm{A}$, donc il existe $a \in \mathrm{A}$, non zéro, tel que $ax^2 = x$, ce qui implique $ax = 1$.

Corollaire 2. *Si* A *est intègre et vérifie la propriété* (R), *alors* A *est un corps.*

LEMME 3. *Soit* A *un anneau avec la propriété* (R). *Alors* $\dim_{\mathrm{Krull}}(A) = 0$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier dans A et $x \in A - \mathfrak{p}$. Considérons l'idéal $\mathfrak{p} + xA$. Comme dans la démonstration précédente, on trouve pour tout $p \in \mathfrak{p}$ un $a \in A$, non nul, tel que

$$p + x = a(p + x)^2 = ap^2 + 2apx + ax^2,$$

donc $x(1 - ax) \in \mathfrak{p}$ et, par le choix de x, $1 - ax \in \mathfrak{p}$; cela implique que $\mathfrak{p} + xA = A$.

PROPOSITION 4. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) A *vérifie la propriété* (R);

(ii) – *ou bien, tout idéal est radical dans* A_{red} $(= A/\sqrt{(0)})$ *et* $\sqrt{(0)}$ *est l'intersection de tous les idéaux propres de* A,

– *ou bien,* A *est un corps.*

(ii) $\Rightarrow$ (i). On peut évidemment se limiter au cas où A n'est pas un corps. Alors, tout idéal propre de A contient le nil-radical, donc l'hypothèse sur A_{red} entraîne immédiatemment (i).

LEMME 5. *Si* A *vérifie* (R), *alors* $\sqrt{(0)}$ *est principal.*

On suppose $\sqrt{(0)} \neq (0)$, donc on sait qu'il existe $y \in \sqrt{(0)}$, non nul; cela entraîne que $\sqrt{yA} \subset \sqrt{(0)}$, on conclut que $yA = \sqrt{(0)}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). On suppose d'abord A non réduit. Il suffit de vérifier que $\sqrt{(0)}$ est l'intersection des idéaux propres de A. En effet, comme $\sqrt{(0)} = yA$, on voit aussitôt qu'on se ramène à démontrer que y est dans tout idéal propre de A. Mais, cela descend immédiatement du fait que y est dans tout idéal premier de A et de l'hypothèse sur A. Pour terminer la démonstration, il suffit de supposer A non intègre et réduit (Corollaire 2). Si, par absurde, l'intersection de tous les idéaux propres de A est non nulle, on voit aussitôt que A ne peut pas étre réduit.

Pour étudier de plus près les anneaux satisfaisant à la condition (R), la proposition précédente permet de se limiter dorénavant aux anneaux réduits.

THÉORÈME 6. *Soit* A *un anneau réduit. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) A *satisfait à la propriété* (R);

(ii) A *satisfait à la propriété* (R');

(iii) A *satisfait à la propriété* (J');

(iv) A *est un produit sous-direct de corps*: $A \overset{j}{\hookrightarrow} \prod_{i \in I} k_i = B$ (1), *et, pour tout idéal* $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{a}B \cap A = \mathfrak{a}$ (i.e. $\mathfrak{a}$ *est saturé par rapport à* j).

(1) i.e. A est inclus dans B par j et $A \overset{j}{\hookrightarrow} B \xrightarrow{pr_i} k_i$ est surjectif pour tout $i \in I$.

Démonstration. Par le Lemme 3, les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes. (i) $\Rightarrow$ (iv). En effet, si l'on pose $k_i = A/\mathfrak{p}_i$ où $\{\mathfrak{p}_i \mid i \in I\} = \operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Specmax}(A)$, on vérifie sans difficulté la première affirmation de (iv). En outre, si $\mathfrak{a} \subset A$ est un idéal quelconque, il est clair que $\mathfrak{a}B \cap A \supset \mathfrak{a}$. Pour voir l'autre inclusion, soit $x \in \mathfrak{a}B \cap A$ qui s'écrit donc dans la forme $x = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot a_{i,k} + p_i\right)_{i \in I} = (x + p_i)_{i \in I}$, où $\alpha_k \in \mathfrak{a}$ et $a_{i,k} \in A$ pour $1 \leq k \leq n$ et $i \in I$. Donc, $x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot a_{i,k} \in \mathfrak{p}_i$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire $x \in \mathfrak{p}_i + \mathfrak{a}$ pour tout $i \in I$, et, en particulier, $x \in \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$.

Voyons que (iv) implique (i). Soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal quelconque. (i) sera alors conséquencee de la chaîne suivante d'inclusions:

$$\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cdot B \cap A \subset \sqrt{\mathfrak{a}B} \cap A = \mathfrak{a}B \cap A = \mathfrak{a}, \qquad \text{Q.E.D.}$$

Remarque 7. Si A est réduit et vérifie une des propriétés équivalentes du Théorème 6, alors tous ses localisés les vérifient aussi, et il en est de méme de tous ses anneaux quotients.

COROLLAIRE 8. *Supposons que* A *soit réduit et que l'ensemble des idéaux premiers minimaux de* A (i.e. *l'ensemble des composantes irréductibles de Spec*(A)) *est fini. Alors, les conditions* (i), (ii) *et* (iii) *du Théorème 6 sont équivalentes à*

(iv)′ A *est isomorphe à un produit fini de corps.*

Cela résulte de la démonstration du théorème et du lemme chinois, en prenant $k_i = A/\mathfrak{p}_i$, où les $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers minimaux de A.

COROLLAIRE 9. *Soit* A *réduit non intègre. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(j) A *vérifie* (M) *ou* (P);

(jj) – *a*) A *vérifie* (R) *ou* (R′) *ou* (J′);
– *b*) Card(Spec (A)) = 2;

(jjj) $A \cong k_1 \times k_2$, *où les* k_i *sont des corps.*

Cela résulte essentiellement du Corollaire 8 (cf. aussi [4]).

Remarque 10. Si A est intègre on a

$$(M) \Longleftrightarrow (P) \Longleftrightarrow (R) \Longleftrightarrow (R') \Longleftrightarrow (J') \Longleftrightarrow A \text{ est un corps.}$$

Exemples. Donnons ici un exemple d'un anneau dont tous les idéaux sont radicaux et qui *n'est pas* isomorphe à un produit de corps.

Soit X un ensemble infini muni de la topologie cofinie, donc un espace topologique irréductible. Soit $B = \mathbf{R}^X$ l'anneau de *toutes* les fonctions à valeurs dans le corps des réels. Soit $A \hookrightarrow B$ le sous-anneau de B des fonctions à valeurs rationnelles presque partout sur X, i.e. sur des ouverts non vides de X. A et B sont évidemment réduits et satisfont à la propriété (R). Mais, A n'est pas isomorphe à aucun produit $\prod_{i \in I} k_i$ de corps.

Supposons, par absurde, qu'il existe un isomorphisme $\varphi : A \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} k_i$ d'anneaux. Soit $f \in A$ un élément dont le support est un seul point $x \in X$. Alors, Supp (φf) est encore un seul élément $x^\varphi \in I$, qui ne dépend pas de f, mais seulement de son support.

L'application $x \mapsto x^\varphi$ établit une bijection $X \xrightarrow{\sim} I$. En outre, l'ensemble des f à support $\{x\}$ est isomorphe à $\mathbf{R}$ et on a donc un isomorphisme $\varphi_x : \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} k_{x^\varphi}$, pour tout $x \in X$.

Pour un élément $g = (g_x)_{x \in X}$ quelconque de A, on a alors $\varphi(g) = (\varphi_x(g_x))_{x^\varphi \in I}$ ce qui se voit en considérant les éléments du type $\varphi(g \cdot (\delta_{x,x'})_{x \in X})$, où $\delta_{x,x'}$ est le symbole de Kronecker. Mais cela est absurde, car les φ_x laissent invariants les nombres rationnels.

On voit aussitôt que cet exemple se généralise en prenant, pour tout $x \in X$, une inclusion *propre* de corps $k_x \subset K_x$ et en prenant pour A l'ensemble de fonctions sur X presque partout à valeurs dans les k_x.

Remarque. Tout idéal $\mathfrak{a}$ dans A est réunion ensembliste $\bigcup_{J \in \mathfrak{J}_\mathfrak{a}} \mathfrak{a}_J$ où $\mathfrak{J}_\mathfrak{a} = \{J \subset I \mid \exists f \in \mathfrak{a} \text{ t.q. Supp}(f) = J\}$, et où $\mathfrak{a}_J = \{f \in A \mid \text{Supp}(f) \subset J\}$ est un idéal « atomique » de $\mathfrak{a}$.

Les idéaux $\mathfrak{a}$ premiers (i.e. maximaux) de A sont donc ceux à familles $\mathfrak{J}_\mathfrak{a}$ maximales (on note que l'ensemble des $\mathfrak{J}_\mathfrak{a}$ est stable pour réunions finies). Pour l'étude générale des anneaux de fonctions voir [2].

2. CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE

Dans ce paragraphe, nous donnons une généralisation géométrique des résultats précédents pour mieux comprendre la structure schématique du spectre d'un anneau A réduit vérifiant la propriété (R).

DÉFINITION 11. *On dit qu'un schéma réduit* X *est co-discret si*

(1) *il existe un morphisme* f: $Y = \text{Spec}\left(\prod_{i \in I} k_i\right) \to X$ *affine, où les* k_i *sont des corps*;

(2) *pour tout sous-schéma fermé* $Z \hookrightarrow X$, *l'image schématique de* $f^{-1}(Z)$ *(qui existe) est égale à* Z.

DÉFINITION 12. *On dit qu'un schéma* X *est localement co-discret s'il existe un recouvrement affine* $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de* X *formé d'ouverts co-discrets* U_λ.

THÉORÈME 13. *Soit* A *un anneau et* X = Spec(A). *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(r) X *est un schéma co-discret*;

(rr) A *est réduit et satisfait aux conditions du Théorème 6.*

Pour voir que (rr) implique (r), supposons vérifiée la condition (iv) du Théorème 6. Alors le morphisme

$$f : Y = \text{Spec}\left(\prod_{i \in I} k_i\right) \to X$$

déduit de l'inclusion $j : A \hookrightarrow \prod_{i \in I} k_i = B$ vérifie (1) de la Définition 11. Pour démontrer la propriété (2) du morphisme f, il suffit de remarquer que l'image schématique d'un sous-schéma fermé $V(\mathfrak{b})$ de Y défini par un idéal $\mathfrak{b} \subset B$ n'est que $V(\mathfrak{b} \cap A)$ et que $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a} \cdot B)$ pour tout sous-schéma fermé $V(\mathfrak{a})$ de X défini par un idéal $\mathfrak{a}$ de A.

Pour voir que (r) implique (rr), il suffit de raisonner comme dans la démonstration (iv) $\Rightarrow$ (i) du Théorème 6.

COROLLAIRE 14. *Tout sous-schéma d'un schéma localement co-discret est localement co-discret.*

Cela résulte de la Remarque 7 et du théorème précédent.

PROPOSITION 15. *Tout schéma* X *quasi-compact et localement co-discret est co-discret.*

En effet, soit $(X_j = \operatorname{Spec}(A_j))_{1 \leq j \leq n}$ un recouvrement fini ouvert co-discret de X. On dispose donc d'une famille finie de morphismes $f_j : Y_j = \operatorname{Spec}\left(\prod_{i \in I_j} k_{i,j}\right) \to X_j$ vérifiant la propriété (2) de la Définition 11. Montrons que le morphisme canonique $f : \coprod Y_j \to X$ déduit des f_j est le morphisme cherché. Comme il est évidemment affine, il reste à voir que pour tout sous-schéma fermé $Z \hookrightarrow X$, l'image schématique de $f^{-1}(Z)$ est égale à Z. Mais vu l'existence de l'image schématique de $f^{-1}(Z)$, il suffit de démontrer $\operatorname{Im. sch.}_{f_j}(f^{-1}(Z)|_{X_j}) = Z|_{X_j}$ pour tout j. Mais cela résulte de l'hypothèse.

COROLLAIRE 16. *Tout schéma affine est localement co-discret si et seulement s'il est co-discret.*

THÉORÈME 17. *Soit* X *un schéma co-discret. Si* $U \xhookrightarrow{j} X$ *est une immersion ouverte quasi-compacte (en particulier, si* U *est un ouvert noethérien, et plus particulièrement si* U *est un ouvert quasi-compact et si* X *est localement noethérien), alors* U *est co-discret.*

COROLLAIRE 18. *Si* X *est co-discret et localement noethérien,* X *est localement co-discret. En particulier, les énoncés suivants sont équivalents*:

(i) X *est noethérien et co-discret;*

(ii) X *est noethérien et localement co-discret;*

(iii) X *est affine et son anneau est un produit fini de corps.*

Ce corollaire est immédiat à partir de la Proposition 15 et du Théorème 17.

Démonstration du théorème. Soit $f : Y \to X$ un morphisme établissant le fait que X est co-discret. Alors la seconde projection $f_U : U \times_X Y \to U$ est affine et $U \times_X Y$ est quasi-compact, car $f_Y : U \times_X Y \to Y$ est quasi-compact et Y est affine. En appliquant la Proposition 15 à $U \times_X Y$ qui est localement co-discret d'après les Corollaires 16 et 14 on conclut que $U \times_X Y$ est co-discret. On a donc un morphisme

$$g : Z \to U \times_X Y$$

vérifiant les propriétés de la Définition 11. Montrons que $f_U \circ g : Z \to U$ est le morphisme cherché.

Notons d'abord que $f_U \circ g$ est affine. D'autre part, soit $V \hookrightarrow U$ un sous-schéma fermé défini par l'idéal quasi-cohérent $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{O}_U$. Considérons alors l'homomorphisme canonique $u : \mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_U) \to j_*(\mathcal{O}_U)/j_*(\mathfrak{J})$. Comme j est quasi-séparé et quasi-compact, les $\mathcal{O}_X$-Modules en question sont tous quasi-cohérents. L'idéal $\mathrm{Ker}(u)$ de $\mathcal{O}_X$ est donc quasi-cohérent et sa restriction $\mathrm{Ker}(u)|_U$ à U est égale à $\mathfrak{J}$. Donc le sous-schéma fermé W de X défini par $\mathrm{Ker}(u)$ se restreint à V dans U. En utilisant [3], Proposition (6.10.7), l'hypothèse sur f et la propriété de W, on conclut que V est l'image schématique de $f^{-1}(W) \cap U \times_X Y$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "g"'] & f^{-1}(W) \cap U \times_X Y \arrow[d] \arrow[r, hook] & f^{-1}(W) \arrow[d] \arrow[ddd, shift left=6] \\
& U \times_X Y \arrow[r, hook, "f_Y"] \arrow[d, "f_U"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
& U \arrow[r, hook, "j"] & X \\
V \arrow[ur] \arrow[rr, hook] & & W \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

D'autre part, $f^{-1}(W) \cap U \times_X Y = f_U^{-1}(V) = \mathrm{Im.sch.}_g(g^{-1}(f_U^{-1}(V)))$. Donc on a $V = \mathrm{Im.sch.}_{f_U}(\mathrm{Im.sch.}_g((f_U \circ g)^{-1}(V))) = \mathrm{Im.sch.}_{f_U \circ g}((f_U \circ g)^{-1}(V))$. QED.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI N., *Algèbre Commutative*, Ch. V. Paris, Hermann 1964.

[2] GILLMAN L. et JERISON M., *Rings of Continuous Functions*. Toronto, Princeton, London, Van Nostrand Company 1960.

[3] GROTHENDIECK A. et DIEUDONNÉ J., *Éléments de Géométrie Algébrique*, *I*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag 1971.

[4] MAROSCIA P., *Sugli anelli commutativi in cui ogni ideale proprio è primo* (à paraître dans « Rend. Acc. Naz. Lincei »).

[5] NAGATA M., *On the Theory of Radicals in a Ring*, « J. of the Math. Society of Japan », *3* (2), 330-344 (1951).

[6] PERTICANI F., *Commutative Rings in which every proper ideal is maximal*, « Fund. Math. », *71*, 193-198 (1971).

Ajouté sur épreuves. – Dans une Note ulterieure, nous démontrerons que tout schéma co-discret et quasi-séparé est affine.