Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Lamberto Cesari

Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari alle derivate parziali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **56** (1974), n.1, p. 1–4.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_1_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 gennaio 1974

Presiede il Presidente della Classe BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari alle derivate parziali.* Nota (*) di LAMBERTO CESARI, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — The Author considers the general canonic form for quasi linear hyperbolic systems with $r+1$ independent variables $x, y_1, \cdots, y_r$, with m unknown functions $z_1, \cdots, z_m$, measurable coefficients and Lipschitzian data, and proves a new variant of the Cauchy problem for an infinite slab $0 \leq x \leq a$, of small width $a > 0$. The Author proves that it is possible to assign m suitable linear combinations of the m unknowns on distinct planes $x = a_i$, $0 \leq a_i \leq a$, provided a is sufficiently small.

1. IL SISTEMA E IL PROBLEMA AI LIMITI

Coi lavori ora classici di H. Lewy [7], O. Perron [9], J. Schauder [10], K. O. Friedrichs [6], R. Courant e P. Lax [5] i problemi iperbolici quasi lineari e nonlineari ricevettero la loro impostazione moderna, e si mostrò che classi di problemi nonlineari possono essere ridotti a problemi quasi lineari. Noi prendiamo in considerazione qui la seguente forma canonica per sistemi iperbolici quasi lineari:

$$(1) \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x, y, z) \frac{\partial z_i}{\partial y_k} = f_i(x, y, z), \quad (x, y) \in D, \quad i = 1, \cdots, m,$$

dove $x, y = (y_1, \cdots, y_r)$ sono le $r+1$ variabili indipendenti, $r \geq 1$, dove $z = z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m)$ sono le m funzioni incognite, e ρ_{ik}, f_i sono date funzioni in $D \times E^m$.

Noi assumiamo qui che D sia una regione illimitata, precisamente uno strato sottile $D = I_a \times E^r$, $I_a = [x \mid 0 \leq x \leq a]$. Invece del solito problema

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1973.

di Cauchy (con dati iniziali sull'iperpiano $x = 0$), noi prendiamo in considerazione il problema ai limiti seguenti, con dati su m iperpiani $x = a_i$, $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, \cdots, m$, in generale distinti. (Non escludiamo che alcuni dei numeri a_i possano coincidere).

I. Siano assegnati m numeri a_i, $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, \cdots, m$, ed m funzioni $\psi_i(y)$, $y \in E^r$, $i = 1, \cdots, m$, e sia proposto il problema di determinare una soluzione $z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m)$, $(x, y) \in I_a \times E^r$, del sistema (1) tale che

$$z_i(a_i, y) = \psi_i(y), \qquad y \in E^r, \qquad i = 1, \cdots, m. \tag{2}$$

In particolare, se $a_i = 0$, $i = 1, \cdots, m'$, $a_i = a$, $i = m' + 1, \cdots, m$, $0 \leq m' \leq m$, le condizioni ai limiti (2) si riducono al problema di assegnare m' delle funzioni z_i sull'iperpiano $x = 0$, e le rimanenti funzioni z_i sull'iperpiano $x = a$. Se $a_i = 0$, $i = 1, \cdots, m$, allora il problema (2) si riduce al problema di Cauchy.

Noi considereremo anche il problema alquanto più generale seguente:

II. Siano assegnati m numeri a_i, $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, \cdots, m$, ed $m^2 + m$ funzioni $\psi_i(y)$, $c_{ij}(y)$, $y \in E^r$, $i, j = 1, \cdots, m$, e sia proposto il problema di determinare una soluzione $z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m)$, $(x, y) \in I_a \times E^r$, del sistema (1) tale che

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}(y)\, z_j(a_i, y) = \psi_i(y), \qquad y \in E^r, \qquad i = 1, \cdots, m. \tag{3}$$

In altre parole, noi richiediamo che m combinazioni lineari distinte delle z_j abbiano valori assegnati su m dati iperpiani $x = a_i$.

Questo problema II si riduce al problema I quando $[c_{ij}(y)]$ è la matrice identica $[c_{ij}] = [\delta_{ij}]$, $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$, $i, j = 1, \cdots, m$. Noi consideriamo qui il problema I in tutta la sua generalità, e il problema II quando $[c_{ij}]$ è una matrice « a diagonale principale dominante ». Con questo intendiamo qui, per brevità, che esista un numero σ, $0 \leq \sigma < 1$, tale che, posto $c_{ij}(y) = \delta_{ij} + \tilde{c}_{ij}(y)$, si ha

$$\sum_{j=1}^{m} |\tilde{c}_{ij}(y)| \leq \sigma < 1, \qquad y \in E^r, \qquad i = 1, \cdots, m. \tag{4}$$

Quando $[c_{ij}]$ è la matrice identica, cioè per il problema I, allora $\tilde{c}_{ij}(y) = 0$, e possiamo prendere $\sigma = 0$.

Mediante l'uso del teorema del punto fisso di Banach noi abbiamo dimostrato in [1] un teorema di esistenza, di unicità, e di dipendenza continua dai dati, per il problema I, così come per il problema più generale II nell'ipotesi (4). Enunciamo brevemente il teorema nel no. 2.

Il problema di assegnare i valori delle m funzioni z_i su m iperpiani diversi (problema I), o di m loro combinazioni lineari su m iperpiani diversi (problema II), per sistemi iperbolici della generalità qui presa in considerazione, è nuovo. Tuttavia, il problema I per sistemi di tipo molto particolare fu preso in considerazione da O. Niccoletti [8] nel 1897, e ripreso successivamente da vari autori, ma sempre per sistemi particolari.

Una generalizzazione di (1) è la forma canonica di Schauder

$$(5)\qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x,y,z)\left[\frac{\partial z_j}{\partial x}+\sum_{k=1}^{r}\rho_{ik}(x,y,z)\frac{\partial z_j}{\partial y_k}\right]=f_i(x,y,z),\qquad (x,y)\in D,\quad i=1,\cdots,m\,.$$

In [2] noi abbiamo considerato i problemi ai limiti I e II per sistemi iperbolici della forma (5) e abbiamo dimostrato un corrispondente teorema di esistenza, di unicità, e di dipendenza continua dai dati.

La forma canonica (5) appare, per esempio, in [10], in [3, 4] e, per $r=1$, in [5]. In [5] è anche dimostrato che, per $r=1$ e in ipotesi di regolarità, la forma (5) è riducibile alla forma (1), e il problema di Cauchy è poi studiato per il sistema (1) (per $r=1$ e in una striscia sottile $I_a\times E^1$) mediante riduzione ad equazioni integrali e relativo uso di trasformazioni che rappresentano una contrazione in uno spazio di Banach. Nel lavoro citato [5] vengono anche prese in considerazione forme modificate del problema di Cauchy, come il problema di assegnare i valori di m combinazioni lineari delle funzioni incognite z_j sulla stessa linea $x=0$ del piano xy, oppure su una data curva continua F passante per l'origine.

M. e S. Cinquini (vedi, per esempio [3, 4]) hanno mostrato recentemente che anche senza ipotesi di regolarità e per ogni $r\geq 1$, il problema di Cauchy per il sistema (5) può essere studiato direttamente (senza riduzione alla forma (1)) mediante l'uso del metodo di approssimazioni successive di Tonelli. Di nuovo senza ipotesi di regolarità e per $r\geq 1$, noi abbiamo mostrato in [1, 2] che il problema di Cauchy per il sistema (5), e così pure per il sistema (1), può essere studiato direttamente mediante l'uso di trasformazioni di contrazione e il teorema del punto fisso di Banach.

2. ENUNCIATO DEL TEOREMA DI ESISTENZA

Indicheremo con $a_0>0$, $\Omega>0$ costanti date, e con I_{a_0}, Ω gli intervalli $I_{a_0}=[x\mid 0\leq x\leq a_0]\subset E^1$, $\Omega=[-\Omega\,,\Omega]^m\subset E^m$.

IL TEOREMA DI ESISTENZA. *Siano* $\rho_{ik}(x,y,z)$, $f_i(x,y,z)$, $i=1,\cdots,m$, $h=1,\cdots,r$, *funzioni definite in* $I_{a_0}\times E^r\times\Omega$, *misurabili in* x *per ogni* (y,z) *e continue in* (y,z) *per ogni* x, *ed esistano funzioni non negative* $m(x)$, $l(x)$, $n(x)$, $l_1(x)$, $0\leq x\leq a_0$, $m,l,n,l_1\in L_1[0,a_0]$, *tali che, per* $(x,y,z),(x,\bar y,\bar z)\in I_{a_0}\times E^r\times\Omega$, $i=1,\cdots,m$, $k=1,\cdots,r$, *si abbia*

$$|\rho_{ik}(x,y,z)|\leq m(x)\quad,\quad |f_i(x,y,z)|\leq n(x)\,,$$
$$|\rho_{ik}(x,y,z)-\rho_{ik}(x,\bar y,\bar z)|\leq l(x)\,[|y-\bar y|+|z-\bar z|]\,,$$
$$|f_i(x,y,z)-f_i(x,\bar y,\bar z)|\leq l_1(x)\,[|y-\bar y|+|z-\bar z|]\,.$$

Siano $c_{ij}(y)$, $y\in E^r$, $i,j=1,\cdots,m$, *date funzioni ed esistano costanti* $0\leq\sigma<1$, $\Gamma,\Lambda\geq 0$ *tali che per tutti gli* $y,\bar y\in E^r$, $i,j=1,\cdots,m$, *valga la* (4) *e si abbia*

$$|c_{ij}(y)|\leq\Gamma\quad,\quad |c_{ij}(y)-c_{ij}(\bar y)|\leq\Lambda\,|y-\bar y|\,.$$

Siano $\psi_i(y)$, $y \in E^r$, $i = 1, \cdots, m$, *date funzioni continue in* E^r, *ed esistano costanti* $\omega_0, \Lambda_0 \geq 0$ *tali che, per tutti gli* $y, \bar{y} \in E^r$, $i = 1, \cdots, m$, *si abbia*

$$\omega_0 < (1 - \sigma)\,\Omega \quad , \quad |\psi_i(y)| \leq \omega_0 \quad , \quad |\psi_i(y) - \psi_i(\bar{y})| \leq \Lambda_0 \, |y - \bar{y}| .$$

Allora esistono una costante $Q > 0$ *ed un numero* a, $0 < a \leq a_0$, *tali che, comunqne siano assegnati i numeri* a_i, $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, \cdots, m$, *esistono* m *funzioni* $z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m)$, $(x, y) = (x, y_1, \cdots, y_r) \in I_a \times E^r$, *continue in* $I_a \times E^r$, *assolutamente continue in* x *per ogni* y, *tali che, per tutti gli* $(x, y), (x, \bar{y}) \in I_a \times E^r$, $i = 1, \cdots, m$, *si ha*

$$|z_i(x, y)| \leq \Omega \quad , \quad |z_i(x, y) - z_i(x, \bar{y})| \leq Q \, |y - \bar{y}| ,$$

e le funzioni z_i *soddisfano le condizioni ai limiti* (3) *ovunque in* E^r *e le equazioni differenziali* (1) *quasi dappertutto in* $I_a \times E^r$.

Una dimostrazione di questo teorema di esistenza è data in [1] insieme con stime del valore di a, $0 < a \leq a_0$, che dipendono soltanto dalle costanti $\omega_0, \Omega, \sigma, \Lambda, \Gamma, \Lambda_0$, e dalle funzioni date m, n, l, l_1. In [1] dimostriamo altresì che la soluzione $z(x, y) = (z_1, \cdots, z_m)$ del problema di cui sopra è unica nella classe indicata in [1], e dipende da $\psi(y) = (\psi_1, \cdots, \psi_m)$ con continuità. In [2] dimostriamo anche un teorema analogo per il sistema (5). In altri lavori si mostrerà come i risultati di Niccoletti e quelli di altri autori circa il problema I siano casi particolari della presente ricerca. Si mostrerà altresì che il teorema di cui sopra può non essere valido quando la condizione (4) non è soddisfatta.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CESARI, *A boundary value problem for quasi linear hyperbolic systems*, «Rend. Mat. Univ. Parma». To appear.

[2] L. CESARI, *A boundary value problem for quasi linear hyperbolic systems in Schauder' canonic form*, «Annali Scuola Norm. Sup. Pisa». To appear.

[3] M. CINQUINI-CIBRARIO e S. CINQUINI, *Equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico*. Ed. Cremonese, viii+552, Roma 1964.

[4] M. CINQUINI-CIBRARIO, *Teoremi di esistenza per sistemi di equazioni quasi lineari alle derivate parziali in più variabili indipendenti*, «Annali di Matematica pura appl.», 75 (4), 1–46 (1967).

[5] R. COURANT e P. D. LAX, *On nonlinear partial differential equations with two independent variables*, «Comm. Pure Appl. Math.», 2, 255–273 (1949).

[6] K. O. FRIEDRICHS, *Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables*, «Amer. Journ. Math.», 70, 555–588 (1948).

[7] H. LEWY, *Über das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhaengigen Veraenderlichen*, «Math. Ann.», 97, 179–191 (1927).

[8] O. NICCOLETTI, *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*, «Atti Accad. Scienze Torino», 33, 746–759 (1897).

[9] O. PERRON, *Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im reellen Gebiet*, «Math. Zeit.», 27, 549–564 (1928).

[10] J. SCHAUDER, *Cauchy'sches Problem fuer partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbetraege der Loesungen beziehenden Abschaetzungen*, «Comment. Math. Helv.», 9, 263–283 (1937).