
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

LUCILLA BASSOTTI

Sulle decomposizioni di alcuni spazi funzionali in somma diretta di sottospazi mutuamente ortogonali

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 56 (1974), n.1, p. 13–21.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1974_8_56_1_13_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sulle decomposizioni di alcuni spazi funzionali in somma diretta di sottospazi mutuamente ortogonali* (*).
Nota di LUCILLA BASSOTTI, presentata (**) dal Corrisp. G. FICHERA.

SUMMARY. — Sobolev spaces on a n -dimensional domain are decomposed into direct sum of subspaces by using suitable orthogonal projectors, which commute with a broad class of linear partial differential operators with constant coefficients. Applications to some classical elliptic boundary value problems are shown.

Sia X un dominio dello spazio euclideo E^n e G un gruppo di congruenze di E^n in sé che lasciano fisso X . Nel lavoro [1] ho indicato un procedimento, legato alla struttura del gruppo G , per decomporre lo spazio $C^\infty(X)$ dei vettori a n componenti funzioni di classe C^∞ in X in somma diretta di sottospazi invarianti rispetto ad una classe di operatori differenziali associata a G .

Vengono ora studiate alcune questioni connesse con le decomposizioni accennate. Si mostra innanzitutto che, se X verifica opportune condizioni di regolarità, ogni decomposizione di $C^\infty(X)$ ottenuta in [1], mediante un procedimento di completamento funzionale rispetto ad un conveniente prodotto scalare, dà luogo ad una decomposizione analoga degli spazi di Sobolev $H^q(\check{X})$ (n. 1).

È noto che, nelle applicazioni, interessano particolarmente le decomposizioni degli spazi $H^q(\check{X})$ in sottospazi mutuamente ortogonali. Al n. 2 di questo lavoro si stabilisce che, se le trasformazioni a quadrato identico, che permettono di ottenere una decomposizione di $C^\infty(X)$, sono «simmetriche» secondo una definizione opportuna, allora i sottospazi che intervengono nelle corrispondenti decomposizioni degli spazi $H^q(\check{X})$ risultano mutuamente ortogonali, e viceversa.

Risultati del tutto analoghi a quelli accennati per gli spazi $H^q(\check{X})$ sussistono anche per alcuni spazi funzionali determinati dagli operatori ellittici autoaggiunti (n. 3).

L'ultima parte del lavoro contiene diverse applicazioni dei risultati ottenuti a problemi di autovalori non necessariamente autoaggiunti connessi con problemi al contorno per operatori differenziali lineari a coefficienti costanti (nn. 4, 5).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca G.N.A.F.A. del C.N.R., nell'anno 1972-73.

(**) Nella seduta del 12 gennaio 1974.

1. Sia X un dominio propriamente regolare dello spazio euclideo E^n ⁽¹⁾, invariante rispetto ad un gruppo G di matrici ortogonali, contenente almeno due elementi ⁽²⁾.

Per ogni numero naturale q , zero incluso, si introducano lo spazio vettoriale $C^q(X)$ costituito dai vettori a n componenti funzioni di classe q in X e il sottospazio $\mathring{C}^q(X)$ dei vettori di $C^q(X)$ a supporto contenuto in $\check{X}$; siano $H^q(\check{X})$ e $\mathring{H}^q(X)$ gli spazi di Sobolev completamento funzionale di $C^q(X)$ e $\mathring{C}^q(X)$ rispetto al prodotto scalare così definito:

$$(1.1) \quad (u, v)_q = \sum_{r=0}^q \frac{1}{r!} \sum_{h_1 \dots h_r}^{1, n} \int_{\check{X}} \frac{\partial^r u}{\partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_r}} \frac{\partial^r v}{\partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_r}} dx.$$

Sia $C^\infty(X) = \bigcap_{q=1}^\infty C^q(X)$. Per ogni matrice ortogonale γ di G , si consideri la trasformazione lineare Γ di $C^\infty(X)$ in sé associata a γ , la quale al vettore $v(x) \equiv \{v^1(x), \dots, v^n(x)\}$ fa corrispondere il vettore Γv di componenti:

$$(1.2) \quad \Gamma^i v(x) = \gamma_l^i v^l(\check{\gamma}x) \quad (3)$$

^{*} $\check{\gamma}$ denotando la matrice trasposta di γ . Le trasformazioni associate alle matrici di G formano un gruppo $\mathcal{T}(G)$ isomorfo a G . Sussiste il seguente teorema

I. *Le trasformazioni di $\mathcal{T}(G)$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Siano $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ p elementi distinti di $\mathcal{T}(G)$ associati rispettivamente alle matrici $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ numeri reali tali che $\sum_{j=1}^p \lambda_j \Gamma_j = 0$. Ne segue, per ogni $v \in C^\infty(X)$:

$$(1.3) \quad \lambda_1 \gamma_{l1}^i v^l(\check{\gamma}_1 x) + \dots + \lambda_p \gamma_{lp}^i v^l(\check{\gamma}_p x) \equiv 0 \quad \text{in } X, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Considerando in particolare vettori aventi solo una componente non identicamente nulla, dalle (1.3) si trae che, per ogni funzione scalare $f(x)$ di classe C^∞ in X , deve essere

$$\lambda_1 \gamma_{l1}^i f(\check{\gamma}_1 x) + \dots + \lambda_p \gamma_{lp}^i f(\check{\gamma}_p x) \equiv 0 \quad \text{in } X, \quad (i, l = 1, \dots, n).$$

Per l'arbitrarietà di f , si deduce $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

Le trasformazioni lineari di $C^\infty(X)$ in sé, combinazioni lineari di un numero finito di trasformazioni di $\mathcal{T}(G)$, costituiscono un'algebra reale con

(1) Con ciò si intende che X sia la chiusura di un aperto $\check{X}$ non vuoto e connesso, propriamente regolare. Per la definizione di aperto propriamente regolare si confronti [2], p. 21.

(2) In E^n si suppone fissata una base ortonormale B . Per la definizione di dominio invariante rispetto a G vedasi [1], n. 3.

(3) In questo lavoro si usa la convenzione di somma di Einstein.

unità I (identità), che sarà denotata con $\mathfrak{L}(G)$. In [1] è stato dimostrato il seguente risultato:

II. Siano $R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$ k trasformazioni di $\mathfrak{L}(G)$, distinte da $\pm I$, a quadrato identico e fra loro permutabili. Posto, per ogni disposizione con ripetizione $\alpha_1 \dots \alpha_k$ degli indici $0, 1$:

$$(1.4) \quad A^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 2^{-k} (I + (-1)^{\alpha_1} R^{(1)}) \dots (I + (-1)^{\alpha_k} R^{(k)}),$$

le trasformazioni $A^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ sono idempotenti. Detti inoltre $P_1, \dots, P_t$ i proiettori non nulli fra quelli definiti dalle (1.4), risulta

$$(1.5) \quad \sum_{i=1}^t P_i = I, \quad P_i P_j = 0 \quad \text{se } i \neq j.$$

I proiettori $P_1, \dots, P_t$, verificando le (1.5), permettono di decomporre ciascuno degli spazi $C^\infty(X)$, $C^\infty(\check{X})$ in somma diretta di t sottospazi che risultano invarianti per tutti gli operatori differenziali lineari e a coefficienti costanti appartenenti alla classe $\mathfrak{L}(G)$ ⁽⁴⁾ (operatori invarianti rispetto a G).

È facile verificare che le trasformazioni di $\mathfrak{L}(G)$ risultano trasformazioni continue di $C^\infty(X)$ in $C^\infty(X)$ nella metrica di ogni spazio $H^q(\check{X})$. Pertanto, comunque si fissi q , esse possono pensarsi come trasformazioni lineari e continue di $H^q(\check{X})$ in sé. Più precisamente sussiste il seguente risultato:

III. *Comunque si fissi q , le trasformazioni di $\mathfrak{T}(G)$ sono operatori unitari di $H^q(\check{X})$ in sé.*

Dimostrazione. Basta osservare che, per ogni coppia u, v di vettori di $C^\infty(X)$ e per ogni $\Gamma \in \mathfrak{T}(G)$ sussiste la relazione $(\Gamma u, \Gamma v)_q = (u, v)_q$ che si prova con un calcolo elementare.

Siano $U_1(X), \dots, U_t(X)$ i sottospazi invarianti ottenuti decomponendo $C^\infty(X)$ per mezzo di $P_1, \dots, P_t$ e sia $U_r^{(q)}(X)$ la chiusura di $U_r(X)$ nello spazio $H^q(\check{X})$. Da quanto precede discende subito che:

IV. *Ogni spazio $H^q(X)$ è somma diretta dei sottospazi $U_1^{(q)}(X), \dots, U_t^{(q)}(X)$.*

2. Nelle applicazioni interessano particolarmente le decomposizioni di $H^q(\check{X})$ in sottospazi mutuamente ortogonali ⁽⁵⁾. È noto che i sottospazi $U_1^{(q)}(X), \dots, U_t^{(q)}(X)$ sono a due a due ortogonali se e solo se i proiettori $P_1, \dots, P_t$ sono autoaggiunti in $H^q(\check{X})$ ⁽⁶⁾. In questo numero verranno date condizioni necessarie e sufficienti perché $P_1, \dots, P_t$ siano autoaggiunti in $H^q(\check{X})$.

(4) Per la definizione di $\mathfrak{L}(G)$ si confronti [1], n. 2.

(5) Decomposizioni di $H^0(\check{X})$ in sottospazi mutuamente ortogonali sono state ottenute, con altro procedimento, da G. F. Smith in [4].

(6) Si confronti [3] sect. 59, Teorema A.

Sia γ una matrice di G e γ^* la sua trasposta. Se Γ e Γ^* sono le trasformazioni lineari di $\mathfrak{T}(G)$ associate rispettivamente a γ e γ^* , è naturale chiamare Γ^* la trasformazione trasposta di Γ .

Sia R una trasformazione lineare di $\mathfrak{A}(G)$ e

$$(2.1) \quad R = a_1 \Gamma_1 + \dots + a_h \Gamma_h$$

una sua rappresentazione mediante trasformazioni di $\mathfrak{T}(G)$. Si dirà *trasformazione trasposta* di R la seguente:

$$(2.2) \quad R^* = a_1 \Gamma_1^* + \dots + a_h \Gamma_h^*.$$

In base al Teorema I del n. 1, la definizione di R^* dipende solo da R , e non dalla particolare rappresentazione (2.1).

Per ogni coppia R, S di trasformazioni di $\mathfrak{A}(G)$ e per ogni coppia λ, μ di numeri reali, si verificano facilmente le seguenti relazioni

$$(2.3) \quad (\lambda R + \mu S)^* = \lambda R^* + \mu S^* \quad , \quad (RS)^* = S^* R^*.$$

Le trasformazioni di $\mathfrak{A}(G)$ coincidenti con le loro trasposte saranno dette *simmetriche*.

In tutto questo numero le trasformazioni di $\mathfrak{A}(G)$ verranno riguardate come trasformazioni lineari e continue di un fissato $H^q(\check{X})$ in sé.

Sussiste il teorema:

I. *Ogni trasformazione R di $\mathfrak{A}(G)$ ammette come trasformazione aggiunta la trasformazione trasposta R^* .*

Dimostrazione. Sia $\Gamma \in \mathfrak{T}(G)$. Dal Teorema III del n. 1, ricordando che $\Gamma\Gamma^* = \Gamma^*\Gamma = I$, segue, per ogni coppia u, v di elementi di $H^q(\check{X})$:

$$(2.4) \quad (\Gamma u, w)_q = (u, \Gamma^* w)_q.$$

Per la bilinearità del prodotto scalare, se R è definita dalla (2.1), dalle (2.4) discende $(Ru, w)_q = (u, R^* w)_q$ per ogni $u, v \in H^q(\check{X})$.

Il seguente teorema risolve il problema posto all'inizio di questo numero.

II. *I proiettori definiti dalle (1.4), come trasformazioni lineari e continue di $H^q(\check{X})$ in sé, sono autoaggiunti se e solo se le trasformazioni $R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$ che li definiscono sono simmetriche.*

Dimostrazione. Siano $R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$ trasformazioni simmetriche: in base al teorema precedente esso sono autoaggiunte; ne segue, tenendo presenti le (2.3), che l'algebra commutativa $\mathfrak{B}(R^{(1)}, \dots, R^{(k)})$ da esse determinata è costituita da trasformazioni autoaggiunte. Ciò prova che ogni proiettore $A^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ è autoaggiunto. Viceversa, i proiettori $A^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ siano tutti autoaggiunti. L'algebra da essi determinata è commutativa e coincide con $\mathfrak{B}(R^{(1)}, \dots, R^{(k)})$ (7);

(7) Si confronti [1], n. 1, Teorema VII.

pertanto le trasformazioni di $\mathfrak{B}(R^{(1)}, \dots, R^{(k)})$ e, in particolare $R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$ sono autoaggiunte. Dal teorema precedente segue allora che $R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$ sono simmetriche.

Si consideri ora il gruppo H della matrici ortogonali diagonali (ovviamente simmetriche). Le trasformazioni di $\mathfrak{A}(H)$ sono tutte simmetriche e pertanto:

III. *Se X è un dominio di E^n invariante rispetto ad H , esistono 2^n proiettori di $\mathfrak{A}(H)$ che inducono in ogni spazio $H^q(\check{X})$ una decomposizione in 2^n sottospazi mutuamente ortogonali⁽⁸⁾.*

Nel caso $n = 3$, in relazione al gruppo HK isomorfo a quello delle congruenze che lasciano fisso un cubo, sussiste il seguente risultato:

IV. *Sia X un cubo di E^3 . Esistono 20 proiettori di $\mathfrak{A}(HK)$ che inducono in ogni spazio $H^q(\check{X})$ una decomposizione in 20 sottospazi mutuamente ortogonali⁽⁹⁾.*

Dimostrazione. Per la decomposizione di $H^q(\check{X})$ in 20 sottospazi invarianti si confronti [1], n. 7, Teorema VIII e anche il n. 1 di questo lavoro. Per l'ortogonalità dei sottospazi costruiti in [1] basta osservare che le trasformazioni $S^{(12)}$ e $3^{-1}[I - 2S^{(12)}S^{(13)} - 2S^{(13)}S^{(12)}]$ sono simmetriche.

3. Sia ora L un operatore differenziale ellittico autoaggiunto appartenente alla classe $\mathfrak{L}(G)$ degli operatori differenziali invarianti rispetto a G . Per ogni $v \in C^\infty(X)$, siano

$$(3.1) \quad L^i v = \sum_{r,s}^{0,m} \frac{1}{r!s!} a_j^{i,h_1 \dots h_r, k_1 \dots k_s} \frac{\partial^{r+s} v^j}{\partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_r} \partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_s}}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

le componenti di Lv . Si consideri in $C^m(X) \times C^m(X)$ la forma bilineare simmetrica determinata da L :

$$(3.2) \quad B(u, v) = \sum_i^{1,n} \sum_{r,s}^{0,m} (-1)^r \frac{1}{r!s!} a_j^{i,h_1 \dots h_r, k_1 \dots k_s} \int_X \frac{\partial^r u^i \partial^s v^j}{\partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_r} \partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_s}} dx$$

e si supponga che essa sia semidefinita positiva. Sussiste il seguente risultato:

I. *Per ogni $u, v \in C^m(X)$ e per ogni $\Gamma \in \mathfrak{C}(G)$ si ha:*

$$(3.3) \quad B(u, v) = B(\Gamma u, \Gamma v).$$

(8) Si confronti [1], n. 4, Teorema IV e il n. 1 di questo lavoro.

(9) Tale risultato sussiste, più in generale, per ogni dominio invariante rispetto al gruppo HK : si confronti [1], n. 7 Teorema VIII. G. F. Smith ha dimostrato, in [4], che il numero 20 è massimo.

Dimostrazione. Fissato $\Gamma \in \mathfrak{T}(G)$, se $u, v \in C^m(X)$, risulta:

$$\begin{aligned} B(\Gamma u, \Gamma v) &= \sum_i^{1,n} \sum_{r,s}^{0,m} \frac{(-r)^r}{r! s!} a_j^{i, h_1 \dots h_r, k_1 \dots k_s} \gamma_l^i \gamma_m^j \int_X \frac{\partial^r u^l (\gamma^* \alpha)}{\partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_r}} \frac{\partial^s v^m (\gamma^* \alpha)}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_s}} dx = \\ &= \sum_i^{1,n} \sum_{r,s}^{0,m} \frac{(-1)^r}{r! s!} a_j^{i, h_1 \dots h_r, k_1 \dots k_s} \gamma_l^i \gamma_m^j \gamma_{h_1}^{*l} \dots \gamma_{h_r}^{*l} \gamma_{k_1}^{*m} \dots \gamma_{k_s}^{*m} \cdot \\ &\quad \cdot \int_X \left(\frac{\partial^r u^l}{\partial x^{h_1} \dots \partial x^{h_r}} \right)_{\gamma x}^* \left(\frac{\partial^s v^m}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_s}} \right)_{\gamma x}^* dx. \end{aligned}$$

Essendo X è invariante rispetto a G , si verifica che:

$$(3.4) \quad \int_X f(\gamma^* x) dx = \int_X f(x) dx$$

per ogni $f \in C^0(X)$. La (3.3) segue allora dal confronto di $B(\Gamma u, \Gamma v)$ con $B(u, v)$, tenendo presenti le relazioni fra i coefficienti di L che esprimono la appartenenza di L ad $\mathfrak{L}(G)$ (si confronti [1], n. 2).

Sia $\Omega(X)$ la varietà lineare dei vettori di $C^\infty(X)$ verificanti l'equazione $B(u, u) = 0$. Dal Teorema I segue immediatamente.

II. *Ogni trasformazione Γ di $\mathfrak{T}(G)$ muta in sé $\Omega(X)$.*

Si introduca ora lo spazio di Hilbert $\mathfrak{H}_L(\check{X})$ ottenuto per completamento funzionale dello spazio quoziente $C^\infty(X)/\Omega(X)$ rispetto al prodotto scalare $((u, v))_m = (-1)^m B(u, v)$.

Dai Teoremi I e II discende che le trasformazioni di $\mathfrak{T}(G)$ possono riguardarsi anche come trasformazioni lineari e continue di $\mathfrak{H}_L(\check{X})$ in $\mathfrak{H}_L(\check{X})$: più precisamente esse risultano unitarie, in quanto, per ogni $\Gamma \in \mathfrak{T}(G)$ e per ogni coppia $u, v \in \mathfrak{H}_L(\check{X})$, risulta $((\Gamma u, \Gamma v))_m = (u, v)_m$.

Poiché le trasformazioni di $\mathfrak{A}(G)$ sono combinazioni lineari di trasformazioni di $\mathfrak{T}(G)$, possiamo, in questo numero, riguardare gli elementi di $\mathfrak{A}(G)$ come trasformazioni lineari continue di $\mathfrak{H}_L(\check{X})$ in $\mathfrak{H}_L(\check{X})$. Sussistono gli analoghi dei Teoremi I e II del n. 2. Precisamente:

III. *Ogni trasformazione R di $\mathfrak{A}(G)$, pensata come trasformazione di $\mathfrak{H}_L(\check{X})$ in sé, ammette come aggiunta la sua trasposta R^* .*

IV. *I proiettori definiti dalle (1.4), come trasformazioni di $\mathfrak{H}_L(X)$ in sé, sono autoaggiunti se e solo se le trasformazioni $R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$ che li definiscono sono simmetriche.*

Indicata con $U_r^*(X)$ la chiusura, in $\mathfrak{H}_L(\check{X})$, dello spazio $U_r(X)/\Omega(X)$ (si confronti n. 1, Teorema II), si ha infine:

V. *Lo spazio $\mathfrak{H}_L(\check{X})$ è somma diretta dei sottospazi $U_1^*(X), \dots, U_t^*(X)$ i quali risultano a due a due ortogonali se e solo se $R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$ sono simmetriche.*

4. Sia $L = (L^1, \dots, L^n)$ un operatore differenziale lineare del 2° ordine a coefficienti costanti, ellittico e autoaggiunto:

$$(4.1) \quad L^i u = a_j^{i,hk} \frac{\partial^2 u^j}{\partial x^h \partial x^k} + b_j^i u^j, \quad (i = 1, \dots, m),$$

X un dominio propriamente regolare di E^n , invariante rispetto a G , $t(x, u) = (t^1(x, u), \dots, t^n(x, u))$ l'operatore differenziale lineare così definito sulla frontiera ∂X di X :

$$(4.2) \quad t^i(x, u) = \sum_{h=1}^n a_j^{i,hk} v^h(x) \frac{\partial u^j}{\partial x^k}, \quad x \in \partial X,$$

ove $v^h(x)$ denota la componente h -esima del versore della normale esterna al dominio X . Siano infine $P_1, \dots, P_i$ t proiettori non nulli di $\mathfrak{A}(G)$ verificanti le (1.5). Si ponga $V_i(\check{X}) = P_i[C^\infty(\check{X})]$. Sussiste il seguente teorema:

I. Se L appartiene ad $\mathfrak{L}(G)$, il problema di Neumann:

$$(4.3) \quad Lu + \lambda u = 0 \text{ in } \check{X}, \quad t(x, u) = 0 \text{ su } \partial X, \quad u \in C^\infty(\check{X}) \cap C^1(X)$$

si spezza nei t problemi

$$(4.4)_i \quad Lu + \lambda u = 0 \text{ in } \check{X}, \quad t(x, u) = 0 \text{ su } \partial X, \quad u \in V_i(\check{X}) \cap C^1(X)$$

relativi ai sottospazi invarianti $V_1(\check{X}), \dots, V_i(\check{X})$ ⁽¹⁰⁾.

Dimostrazione. Sia $\Sigma(X)$ la varietà lineare dei vettori u di $C^1(X)$ per i quali $t(x, u) = 0$ su ∂X . Vogliamo dimostrare che ciascuno dei proiettori P_i muta in sé $\Sigma(X)$. Essendo $t(x, u)$ un operatore differenziale lineare, sarà sufficiente far vedere che per ogni $u \in \Sigma(X)$ e per ogni $\Gamma \in \mathfrak{T}(G)$ risulta $t(x, \Gamma u) = 0$ su ∂X .

È ben noto che, nella congruenza determinata da una matrice $\gamma \in G$, la frontiera di X è mutata in sé e si corrispondono i versori delle normali esterne relative ai punti x e γx . Si ha dunque:

$$(4.5) \quad v^r(\gamma x) = \gamma_r^s v^s(x), \quad x \in \partial X.$$

Ciò premesso, fissati $u \in C^1(X)$ e $\gamma \in G$, risulta, in ogni $x \in \partial X$:

$$(4.6) \quad t^i(x, \Gamma u) = \sum_{h=1}^n a_j^{i,hk} v^h(x) \gamma_q^j \frac{\partial u^q(\gamma x)}{\partial x^k} = \sum_{h=1}^n a_j^{i,hk} v^h(x) \gamma_q^j \gamma_k^s \left(\frac{\partial u^q}{\partial x^s} \right)_{\gamma x}^*.$$

Poiché L è invariante rispetto a G , i coefficienti di L verificano le relazioni:

$$(4.7) \quad a_j^{i,hk} \gamma_q^j \gamma_k^s = a_q^{l,rs} \gamma_l^i \gamma_r^h.$$

Segue allora, in base alle (4.5) e (4.7), se $u \in \Sigma(X)$:

$$t^i(x, \Gamma u) = \sum_{r=1}^n \gamma_l^i a_q^{l,rs} v^r(\gamma x) \left(\frac{\partial u^q}{\partial x^s} \right)_{\gamma x}^* = \gamma_l^i [t^l(x, u)]_{\gamma x}^* = 0.$$

Resta così provato che ogni proiettore P_i muta in sé $\Sigma(X)$. La tesi si ottiene allora applicando il teorema I del n. 9 di [I].

(10) Nel senso precisato in [I], n. 9, Teorema I.

5. Sia X un dominio propriamente regolare dello spazio euclideo E^n , invariante rispetto a G . Si considerino, in questo numero, gli spazi vettoriali complessi $\mathcal{S}^q(X)$ costituiti dai vettori a n componenti funzioni complesse di n variabili reali, di classe q in X . Da essi, con un procedimento di completamento analogo a quello indicato nel n. 1, si ottengono gli spazi di Sobolev complessi $H_c^q(\check{X})$.

Le (1.2) permettono di associare ad ogni matrice γ di G , una trasformazione lineare di $\mathcal{S}^q(X)$ in sé, che indicherò ancora con Γ . Ne segue che le trasformazioni lineari di $\mathcal{A}(G)$ possono pensarsi come trasformazioni lineari e continue di $H_c^q(\check{X})$ in sé ed esse risultano autoaggiunte se e solo se sono simmetriche (n. 2).

Siano $P_1, \dots, P_t$ t proiettori non nulli di $\mathcal{A}(G)$ verificanti le (1.5): essi determinano una decomposizione di ciascuno degli spazi $\mathcal{S}^q(X)$, $H_c^q(\check{X})$ in somma diretta di t sottospazi. Si noti che, se M è un operatore differenziale di ordine m appartenente alla classe $\mathcal{L}(G)$ degli operatori differenziali invarianti rispetto a G , per i vettori w di $H_c^q(\check{X})$ con $q \geq m$ risulta:

$$(5.1) \quad P_i M w = M P_i w, \quad (i = 1, \dots, t).$$

Le (5.1) sussistono anche per i vettori appartenenti allo spazio $\mathcal{S}^\infty(\check{X})$ (vettori complessi di classe $\mathcal{C}^\infty$ nell'interno di X). Ciò premesso, sussiste il teorema.

I. Se L è un operatore differenziale ellittico di $\mathcal{L}(G)$, $\Sigma(X)$ un sottospazio vettoriale di $\mathcal{S}^\infty(\check{X})$ mutato in sé da ogni proiettore $P_1, \dots, P_t$, il problema di autovalori

$$(5.2) \quad Lu + \lambda u = 0, \quad u \in \Sigma(X)$$

si spezza nei t problemi dello stesso tipo:

$$(5.3)_i \quad Lu + \lambda u = 0, \quad u \in P_i \Sigma(X),$$

nel senso che, se in corrispondenza ad un valore complesso λ , $N^{(\lambda)}$ e $N_i^{(\lambda)}$ denotano rispettivamente gli insiemi delle soluzioni di (5.2) e (5.3)_i, risulta

$$(5.4) \quad N^{(\lambda)} = N_1^{(\lambda)} \oplus N_2^{(\lambda)} \oplus \dots \oplus N_t^{(\lambda)}.$$

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema I del n. 9 di [1].

Si osservi ora che, se u è un vettore di $H_c^q(\check{X})$, si può parlare di «traccia sulla frontiera ∂X » di u e di ogni sua derivata di ordine non superiore a $q - 1$. Precisamente, denotato con $H_c^0(\partial X)$ lo spazio di Hilbert dei vettori a n componenti funzioni complesse di quadrato sommabile su ∂X , esiste ed è unica una trasformazione lineare e continua τ di $H_c^1(\check{X})$ in $H_c^0(\partial X)$ tale che, per ogni $v \in \mathcal{S}^\infty(X)$, risulti $(\tau v)(x) = v(x)$ su ∂X (11). Ad ogni $u \in H_c^1(\check{X})$ resta dunque associato il vettore τu di $H_c^0(\partial X)$, che dicesi *la traccia di u su ∂X* . Se $u \in \mathcal{S}^0(X)$,

(11) Si confronti [2], Lect. 4.

l'ordinaria traccia di u su ∂X , che appartiene ad $H_c^0(\partial X)$, sarà ancora indicata con τu . Si ha il seguente risultato:

II. Se $u \in H_c^1(\check{X})$ oppure $u \in \mathcal{S}^0(X)$ e risulta $\tau u = 0$, allora per ogni $R \in \mathfrak{A}(G)$ riesce $\tau Ru = 0$.

Dimostrazione. Con un calcolo diretto si prova che, se $\Gamma \in \mathcal{T}(G)$ e $u \in \mathcal{S}^0(X)$, i vettori $\tau \Gamma u$ e τu hanno la stessa norma in $H_c^0(\partial X)$. Questo risultato si estende ai vettori $H_c^1(\check{X})$, per la continuità di Γ come operatore di $H_c^1(\check{X})$ in sé e di τ come operatore di $H_c^1(\check{X})$ in $H_c^0(\partial X)$. La tesi segue allora dalla definizione delle trasformazioni R e dalla linearità di τ .

Si consideri ora un operatore differenziale ellittico L appartenente alla classe $\mathcal{L}(G)$ degli operatori invarianti rispetto a G e una successione (finita o infinita) $M_1, \dots, M_k, \dots$ di operatori differenziali di $\mathcal{L}(G)$, di ordine non superiore ad r (r essendo un numero naturale arbitrario). Siano $P_1, \dots, P_t$ t proiettori non nulli di $\mathfrak{A}(G)$ verificanti le (1.5) e $W_1(\check{X}), \dots, W_t(\check{X})$ i sottospazi invarianti nei quali viene decomposto in corrispondenza $\mathcal{S}^\infty(\check{X})$. Sussiste il seguente teorema:

III. *Il problema di autovalori*

$$(5.5) \quad Lu + \lambda u = 0 \text{ in } \check{X}, \quad M_k u = 0 \text{ su } \partial X, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

in $\mathcal{S}^\infty(\check{X}) \cap H_c^{r+1}(\check{X})$ si spezza in t problemi dello stesso tipo relativi agli spazi $W_i(\check{X}) \cap H_c^{r+1}(\check{X})$, nel senso che per ogni λ complesso sussiste la decomposizione (5.4)

Dimostrazione. In base al Teorema I di questo numero, basta dimostrare che lo spazio vettoriale $\Sigma(X)$ dei vettori di $H_c^{r+1}(\check{X})$ per i quali $\tau M_k u = 0$ ($k=1, 2, \dots$) in $H_c^0(\partial X)$ è mutato in sé da ciascuno dei proiettori $P_1, \dots, P_t$. A tal fine occorre osservare che, essendo $M_k \in \mathcal{L}(G)$, per ogni $u \in \Sigma(X)$ e per ogni P_i sussistono le relazioni $P_i M_k u = M_k P_i u$ (si confrontino le (5.1)). In base al Teorema II, $u \in \Sigma(X)$ implica $\tau M_k P_i u = \tau P_i M_k u = 0$. Ciò prova che $\Sigma(X)$ è mutata in sé da ciascuno dei proiettori $P_1, \dots, P_t$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. BASSOTTI, *Sottospazi invarianti per operatori differenziati lineari a coefficienti costanti*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », XXII, 1973.
- [2] G. FICHERA, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, « Lect. Notes Math. », 8, Springer-Verlag, 1965.
- [3] G. SIMMONS, *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [4] G. F. SMITH, *Projection Operator for Symmetric Regions* (in corso di stampa).

(12) La condizione $M_k u = 0$ su ∂X va interpretata nel senso che la traccia $\tau M_k u$ di $M_k u \in H_c^1(\check{X})$ è nulla in $H_c^0(\partial X)$.