
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CATALDO AGOSTINELLI

**Su alcuni moti lenti di un plasma molto rarefatto
soggetto a un campo magnetico e alla propria
gravitazione.**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 55 (1973), n.6, p. 697–704.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_6_697_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Plasma-dinamica. — *Su alcuni moti lenti di un plasma molto rarefatto soggetto a un campo magnetico e alla propria gravitazione.*
Nota (*) del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper we consider some slow magneto-dynamics motions of a very rarefied plasma, or a continuous of electrified particles, subjected to the proper gravitation and to a magnetic field, that a resolvent equation admit, in which the only unknown is the density. We make applications to the case in which the plasma density varies for indefinite plane parallel layers, or by cylindrical coaxial layers.

1. In questa Nota viene considerato il moto di un plasma, o se si vuole di un mezzo continuo, costituito di particelle elettrizzate, molto rarefatto, tale da poterlo ritenere come uno sciame di corpuscoli in cui la coesione e quindi la pressione sia nulla, soggetto alla propria attrazione newtoniana e a un campo magnetico.

Si suppone inoltre che si tratti di *moti lenti*, nel senso cioè che la variazione di una data grandezza dovuta allo spostamento elementare di una particella sia trascurabile in confronto della variazione temporale della stessa grandezza. In questo caso esiste un'equazione risolvibile del problema in cui è incognita la sola densità del mezzo.

Questo ordine di studi, che ha ovviamente interesse cosmogonico, o astrofisico, fu iniziato da Levi-Civita ⁽¹⁾ nel caso semplice di un mezzo continuo disgregato soggetto unicamente alla propria gravitazione.

In tal caso l'equazione risolvibile che definisce la densità contiene soltanto derivate parziali rispetto al tempo e presenta la circostanza favorevole di essere indipendente da coordinate spaziali. In questo caso determina facilmente l'integrale generale e assegna un limite superiore al tempo, a partire dall'istante iniziale, entro il quale la densità si mantiene finita, o almeno valgano le ipotesi ammesse di moto lento.

Nel caso di un plasma in presenza di un campo magnetico nell'equazione risolvibile figura anche il laplaciano della densità. Ma alcune delle ipotesi ammesse per arrivare a questa equazione sono verificate soltanto in alcuni casi particolari: ad esempio se le incognite dipendono da una sola coordinata spaziale.

In questo caso il problema viene completamente risolto se la densità del plasma varia per strati piani paralleli indefiniti, oppure per strati cilindrici

(*) Presentata nella seduta del 15 dicembre 1973.

(1) T. LEVI-CIVITA, *Movimenti per sola gravitazione di un sistema continuo*, « Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari ». Pavia, Rossetti, 1936.

Dello stesso Autore cfr. anche: *Moti gravitazionali in una dimensione*, « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », ser. VI, I, 1925.

coassiali. In entrambi i casi si ha per il tempo un limite superiore, che dipende dalle condizioni iniziali, al disotto del quale la densità si mantiene finita, non si ha cioè addensamento di materia, poiché allora cadrebbero le ipotesi di plasma rarefatto, di assenza di pressione e di moto lento.

2. Le equazioni da considerare sono:

$$(1) \quad \mu \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mu \mathbf{F} + \eta \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H}$$

$$(2) \quad \frac{d\mu}{dt} + \mu \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}) = 0, \quad (\operatorname{div} \mathbf{H} = 0),$$

dove μ è la densità del plasma, η la permeabilità magnetica (costante), $\mathbf{F}$ la forza gravitazionale newtoniana che agisce sull'unità di massa e gli altri simboli hanno il consueto significato.

L'equazione (3) del campo magnetico si può scrivere nella forma

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{H}}{dP} \mathbf{v} + \left(\operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right) \mathbf{H} = 0,$$

dove P è un punto del campo.

Inoltre abbiamo

$$(5) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{H}}{dP} \mathbf{H} - \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} H^2 \right).$$

Ci riferiamo ora ai moti tali che in ogni punto e in ogni istante sia identicamente

$$(6) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{H} = 0, \quad (7) \quad \frac{d\mathbf{H}}{dP} \mathbf{H} = 0,$$

e consideriamo inoltre *moti lenti*, sul senso di Levi-Civita, per cui possiamo trascurare i termini

$$\frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}, \quad \operatorname{grad} \mu \times \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{H}}{dP} \mathbf{v}$$

in confronto di

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

In tali ipotesi le equazioni (1), (2) e (4) si riducono alle seguenti

$$(8) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F} - \frac{\eta}{\mu} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} H^2 \right)$$

$$(9) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(10) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Dalle equazioni (9) e (10) deduciamo

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{H}}{\mu} \right) = 0$$

e abbiamo quindi l'invariante

$$(12) \quad \frac{\mathbf{H}}{\mu} = \frac{\mathbf{H}_0}{\mu_0}; \quad \text{da cui} \quad (13) \quad \mathbf{H} = \frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{H}_0,$$

dove $\mathbf{H}_0$ e μ_0 sono i valori del campo magnetico e della densità all'istante iniziale, funzioni della posizione iniziale P_0 del punto P . La condizione $\text{div}_P \mathbf{H} = 0$ è ovviamente verificata se la distribuzione iniziale è tale che

$$(14) \quad \text{div}_{P_0} \mathbf{H}_0 = 0, \quad \text{grad}_{P_0} \mu_0 \times \mathbf{H}_0 = 0, \quad \text{grad}_P \mu \times \mathbf{H} = 0.$$

Tenendo conto della (13) e osservando che $V_a^2 = \mu H_0^2 / \mu_0$ è il quadrato della velocità delle onde di Alfvén, l'equazione (8) diventa

$$(15) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F} - \frac{V_a^2}{\mu_0} \text{grad } \mu.$$

Prendendo la divergenza di ambo i membri di questa equazione, osservando che per l'equazione di Poisson si ha

$$(16) \quad \text{div } \mathbf{F} = -4\pi f\mu,$$

e avendo riguardo alla (9), si ottiene

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) - 4\pi f\mu - \frac{V_a^2}{\mu_0} \Delta_2 \mu,$$

che è l'equazione risolvente che si voleva stabilire.

Un caso in cui le relazioni (6) e (7) sono identicamente verificate è quello in cui, in coordinate cartesiane ortogonali, tutte le incognite dipendono soltanto dalle variabili x, t e il campo magnetico è perpendicolare all'asse x ($H_x = 0$). In questo caso l'equazione (17) porge

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) - 4\pi f\mu - \frac{V_a^2}{\mu_0} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = 0,$$

che è suscettibile di integrazione per separazione di variabili.

Un altro caso si ha quando in coordinate cilindriche r, φ, z , il campo magnetico è parallelo all'asse z e tutti gli elementi sono funzioni soltanto della distanza r dall'asse z e del tempo t .

In questo caso abbiamo l'equazione

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) - 4\pi f\mu - \frac{V_a^2}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mu}{\partial r} \right) = 0,$$

che è pure suscettibile di integrazione.

3. Applichiamo l'equazione (18) al caso di un plasma indefinito che si muove per strati piani omogenei perpendicolari all'asse x , tale cioè che in ogni piano si trovino sempre le medesime particelle. La densità μ sarà allora funzione dell'ascissa x dello strato che si considera e del tempo t . Lo stesso sarà delle altre grandezze.

Per integrare la (18) poniamo

$$(20) \quad \mu = \mu_0 \varphi(t) \psi(x),$$

dove μ_0 è la densità all'istante iniziale $t = 0$, che possiamo supporre funzione dell'ascissa iniziale x_0 dello strato che all'istante t ha per ascissa x . Le funzioni $\varphi(t)$, $\psi(x)$ saranno sempre positive, oltreché continue e si ridurranno rispettivamente all'unità per $t = 0$ e $x = x_0$.

Sostituendo nella (18), separando le variabili col dividere ambo i membri per $\varphi(t)$, essa si scinde nelle due

$$(21) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right) = C_0 \varphi$$

$$(22) \quad V_a^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + 4\pi f \mu_0 \psi = C_0,$$

dove C_0 è una costante arbitraria, che dipenderà dalle condizioni iniziali, e che supporremo positiva.

Per integrare la (21) poniamo

$$\varphi = 1/\xi^2$$

con che essa diventa

$$2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dt} \right) = - \frac{C_0}{\xi^2};$$

moltiplicando ambo i membri per $\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dt}$ e integrando si ottiene

$$\left(\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{C_0}{2\xi^2} + C_1,$$

essendo C_1 un'altra costante arbitraria che può essere positiva o negativa. Considereremo il caso in cui essa è negativa e porremo $C_1 = -k^2 C_0/2$, ($k > 0$). Ricaviamo allora

$$(23) \quad \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{C_0}{2} (1 - k^2 \xi^2).$$

Poiché per $t = 0$ è $\varphi = 1$, e quindi anche $\xi^2 = 1$, per la realtà di $d\xi/dt$ dovrà essere necessariamente $k < 1$. Ponendo ancora

$$(24) \quad \omega^2 = 2\pi f \mu_0, \quad C_0 = 2\omega^2 \gamma_0^2$$

con γ_0 costante dipendente anch'essa da x_0 , si ricava dalla (23)

$$\xi = \cos(\gamma_0 k \omega t \pm \chi_0)/k$$

e quindi

$$(25) \quad \varphi = \frac{k^2}{\cos^2(\gamma_0 k\omega t \pm \chi_0)}$$

essendo χ_0 una nuova costante. Poiché per $t = 0$, dovrà risultare $\varphi = 1$, si deduce che χ_0 sarà un angolo tale che $\cos \chi_0 = k$.

Nella (25) si assumerà davanti a χ_0 il segno $+$, oppure il segno $-$ secondo che all'istante iniziale la densità è crescente, oppure decrescente. Invero basta osservare che si ha

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)_{t=0} = \mu_0 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} \psi(x_0), \quad \text{e} \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = 2\gamma_0 \omega \sin(\pm \chi_0).$$

La (22) porge ora

$$(26) \quad \psi = \gamma_0^2 + A_0 \sin\left(\frac{\omega}{V_a} \sqrt{2} x + \alpha\right)$$

dove A_0 è l'ampiezza dell'oscillazione della funzione ψ , ed α la fase, entrambe funzioni di x_0 . Poiché per $t = 0$, cioè per $x = x_0$, è $\psi = 1$, ne segue che deve essere

$$(27) \quad \gamma_0^2 + A_0 \sin\left(\frac{\omega}{V_a} \sqrt{2} x_0 + \alpha\right) = 1.$$

Si ha allora

$$(28) \quad \psi = 1 + A_0 \left\{ \sin\left(\frac{\omega}{V_a} \sqrt{2} x + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\omega}{V_a} \sqrt{2} x_0 + \alpha\right) \right\}$$

e quindi in definitiva

$$(29) \quad \mu = \mu_0 \frac{k^2}{\cos^2(\gamma_0 k\omega t \pm \chi_0)} \cdot \left\{ 1 + 2A_0 \cos\left(\frac{\omega}{V_a} \sqrt{2} \frac{x+x_0}{2} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\omega}{V_a} \sqrt{2} \frac{x-x_0}{2}\right) \right\},$$

il cui secondo membro si riduce proprio a μ_0 per $t = 0$ ed $x = x_0$.

Osserviamo che la (27) dovrà essere verificata per ogni valore di x_0 . Ne segue che A_0 sarà in valore assoluto minore di 1, e

$$1 - |A_0| \leq \gamma_0^2 \leq 1 + |A_0|.$$

La costante γ_0 , che dipende da x_0 , può risultare dunque minore, oppure maggiore dell'unità.

Osserviamo ancora che l'espressione (29) della densità sarà valida, a partire dal $t = 0$, fino a quando saranno soddisfatte tutte le ipotesi che abbiamo ammesse per arrivare ad essa. Fra queste vi è quella che la densità μ si mantenga finita e quindi la sua considerazione va limitata ad un tempo t molto minore del tempo T che annulla il $\cos(\gamma_0 k\omega t \pm \chi_0)$, che risulta dato da

$$(30) \quad T = \frac{\frac{\pi}{2} \mp \chi_0}{\gamma_0 k\omega}.$$

Osserviamo infine che in assenza di campo magnetico si ha $V_a = 0$, e dalla (22) segue che ψ ha costantemente il valore 1. Allora anche γ_0 ha il valore 1 e si ricade nel caso considerato da Levi-Civita, il quale, facendone applicazione alla Galassia, ha trovato come limite del tempo t il valore

$$T^* = \frac{\frac{\pi}{2} \mp \chi_0}{k\omega} \approx 5 \cdot 10^7 \text{ anni.}$$

Nel caso qui considerato, per gli strati provenienti da posizioni iniziali x_0 per cui è $\gamma_0 < 1$ sarà $T > T^*$, per quelli tali che $\gamma_0 > 1$, sarà invece $T < T^*$.

È facile ora completare la risoluzione del problema. Intanto il campo magnetico $\mathbf{H}$ è immediatamente dato, in funzione della densità μ , dalla (13), dove supponiamo che il campo magnetico iniziale $\mathbf{H}_0$ sia uniforme e diretto perpendicolarmente all'asse x , cioè parallelo agli strati e quindi perpendicolare alla direzione del movimento.

Per determinare ora la velocità delle particelle di uno strato generico di ascissa x , ricordiamo che uno strato piano indefinito, di densità uniforme $\mu(\xi, t)$ e di spessore $d\xi$, esercita sull'unità di massa posta in un punto generico P di ascissa x , un'attrazione elementare che è indipendente da x , in valore assoluto data da $2\pi f\mu d\xi$, diretta dal punto potenziato P verso lo strato potenziante di ascissa ξ . La componente secondo l'asse Ox di tale attrazione elementare vale $-2\pi f\mu d\xi$ per $\xi < x$, e $2\pi f\mu d\xi$ per $\xi > x$. La risultante dell'attrazione in P risulta dunque

$$(31) \quad F = -2\pi f \int_{-\infty}^x \mu(\xi, t) d\xi + 2\pi f \int_x^{\infty} \mu(\xi, t) d\xi = -2\pi f m_1 + 2\pi f m_2,$$

dove m_1, m_2 rappresentano le masse totali del mezzo, per unità di sezione trasversale, che si trovano rispettivamente dalle parti $\xi < x$ e $\xi > x$. Per il principio di conservazione della massa durante il moto del plasma le masse m_1 ed m_2 , da una parte e dall'altra del piano di ascissa x , rimangono costanti, poiché costituite sempre dalle stesse particelle. Ne segue che m_1 ed m_2 non variano col tempo, ma conservano la loro determinazione iniziale; possiamo cioè scrivere

$$(32) \quad m_1 = \int_{-\infty}^{x_0} \mu_0(\xi) d\xi, \quad m_2 = \int_{x_0}^{\infty} \mu_0(\xi) d\xi.$$

In virtù della (31) anche la forza di attrazione $\mathbf{F}$ si conserva costante:

$$(33) \quad F(x, t) = F(x_0) = -2\pi f m_1 + 2\pi f m_2,$$

e l'equazione (15), proiettata sull'asse x , porge

$$(34) \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = F(x_0) - \frac{V_a^2}{\mu_0} \frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Tenendo conto del valore (29) di μ si ha

$$(35) \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = F(x_0) - \omega V_a A_0 \sqrt{2} \frac{k^2}{\cos^2(\gamma_0 k \omega t \pm \chi_0)} \cos\left(\frac{\omega}{V_a} \sqrt{2} x + \alpha\right),$$

e integrando si ricava

$$(36) \quad \dot{x} = \dot{x}_0 + F(x_0) t - \frac{V_a A_0 k \sqrt{2}}{\gamma_0} \cos\left(\frac{\omega}{V_a} \sqrt{2} x + \alpha\right) \cdot \{\tan(\gamma_0 k \omega t \pm \chi_0) \mp \tan \chi_0\},$$

dove $\dot{x}_0$ è la velocità, all'istante iniziale, delle particelle che all'istante t occupano lo strato di ascissa x ; essa in generale sarà funzione di x_0 . Giova osservare che le formule precedenti valgono anche nel caso in cui la distribuzione iniziale del plasma occupa una regione di ampiezza finita compresa fra i piani $x_0 = -l$ ed $x_0 = l$. In questo caso si ha

$$m_1 = \int_{-l}^{x_0} \mu_0(\xi) d\xi, \quad m_2 = \int_{x_0}^l \mu_0(\xi) d\xi$$

e la forza di attrazione in un punto di ascissa x interno allo strato è ancora costante ed è espresso dalla (33).

4. I risultati ottenuti si possono applicare anche al caso in cui il plasma è distribuito inizialmente per strati cilindrici omogenei, coassiali e indefiniti, che tale si mantenga per tutta la durata del moto. In questo caso, indicando con r la distanza di una particella dall'asse di simmetria e supponendo che il campo magnetico $\mathbf{H}$ sia costantemente diretto secondo quest'asse e sia funzione soltanto di r e di t , sussiste l'equazione (19) e col solito criterio della separazione delle variabili si trova

$$(37) \quad \mu = \mu_0 \frac{k^2}{\cos^2(\gamma_0 k \omega t \pm \chi_0)} \left\{ 1 + A_0 \left[J_0\left(\frac{\omega \sqrt{2}}{V_a} r\right) - J_0\left(\frac{\omega \sqrt{2}}{V_a} r_0\right) \right] \right\},$$

dove J_0 è la funzione di Bessel di prima specie di ordine zero; l'ampiezza A_0 dell'oscillazione è funzione del raggio iniziale r_0 ; $k = \cos \chi_0$ ha il solito significato, ed è

$$(38) \quad \gamma_0^2 = 1 - A_0 J_0\left(\frac{\omega \sqrt{2}}{V_a} r_0\right).$$

Poiché il massimo valore di J_0 si ha per $r_0 = 0$, e vale 1, se supponiamo $A_0 > 0$, dovrà essere $A_0 < 1$.

La forza di attrazione in un punto interno al plasma è diretta verso l'asse. Se esso occupa inizialmente una regione compresa fra due superficie cilindriche coassiali di raggi R_1, R_2 ($R_1 < R_2$), in tal caso r_0 varierà fra R_1 ed R_2 . Se inoltre si ha un nucleo cilindrico di raggio $a < R_1$, la forza di attrazione esercitata in un punto interno al plasma, distante r dall'asse, sarà

data da $F = -2f(M + m)/r$, dove M è la massa del nucleo (per unità di lunghezza), ed m quella del plasma contenuto entro il cilindro di raggio r , che è uguale a quella m_0 contenuta inizialmente fra i cilindri di raggi R_1, r_0 ,

data da $m_0 = 2\pi \int_{R_1}^{r_0} \mu_0(\xi) \xi d\xi$.

L'equazione del moto risulta in questo caso

$$(39) \quad \frac{\partial \dot{r}}{\partial t} = -2f \frac{M + m_0}{r} - \frac{V_a^2}{\mu_0} \frac{\partial \mu}{\partial r}$$

e si ricava

$$(40) \quad \dot{r} = \dot{r}_0 - 2f \frac{M + m_0}{r} t + \\ + \frac{A_0 V \sqrt{2}}{\gamma_0} k [\tan(\gamma_0 k \omega t \pm \chi_0) \mp \tan \chi_0] J_1 \left(\frac{\omega \sqrt{2}}{V_a} r \right),$$

dove la velocità iniziale $\dot{r}_0$ sarà funzione di r_0 , con $R_1 < r_0 < R_2$.