Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Fabrizio

Dualità e reciprocità per le equazioni non lineari dell'elettromagnetismo ereditario. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.6, p. 692–696.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_6_692_0>

Fisica matematica. — *Dualità e reciprocità per le equazioni non lineari dell'elettromagnetismo ereditario* (*). Nota II di MAURO FABRIZIO, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

RÉSUMÉ. — On recherche les conditions par lesquelles les théorèmes de dualité établis dans la Nota I sont réduits à des théorèmes de réciprocité.

1. Ricordiamo che nella Nota I abbiamo stabilito, per le equazioni non lineari dell'elettromagnetismo ereditario, una relazione di dualità espressa da (I,21) [1].

In questa seconda parte affronteremo la questione di pervenire a teoremi di *reciprocità in senso stretto*, cioè identità tra il Problema 1 e il loro Duale.

A tal fine, limitandoci al caso lineare, è importante stabilire quanto $\underset{\sim}{\mathrm{A}}^{u} = \mathrm{A}^{u}$. Per la particolare forma della trasformazione R si dimostra necessario che:

$$\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{B}} = -\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{B}} \quad ; \quad \partial_{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{D}} = -\partial_{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{D}} \,. \tag{II,1}$$

Tale restrizione si aggiunge alla condizione termodinamica (F; 2,10). Quindi una reciprocità del tipo (I,21) potrà sussistere soltanto quando $\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{B}} = \partial_{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{D}} = 0$, cioè quando il materiale non è bianisotropo.

Infatti, per mezzi lineari non in moto, Kong [2], [3] giunge alla conclusione che i materiali bianisotropi sono non reciproci.

Solitamente per problemi non lineari non si è cercato di formulare teoremi di reciprocità. In effetti, come vedremo fra breve, tale possibilità esiste sotto particolari condizioni anche per materiali non lineari.

Infatti, limitandoci a materiali non bianisotropi e non ereditari, quindi $\mathrm{C}^{u} = 0$, se v verifica la condizione:

$$\partial_{v} \tilde{\mathrm{F}}(v) = \mathrm{A}^{u}(x, \mathrm{T} - t) \overset{\text{def.}}{=} \int_{0}^{1} \partial_{\tau u} \partial_{\tau u} \tilde{\psi}(\tau u(t)) \, d\tau \tag{II,2}$$

allora

$$\mathrm{A}^{u}(x, \mathrm{T} - t) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathrm{F}}(v) \,. \tag{II,3}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca per la Matematica del C.N.R.
(**) Nella seduta del 26 novembre 1973.
(1) Le formule indicate (I, ·) sono relative alla Nota I, mentre con (F ; ·) rappresentiamo le formule del lavoro [1].

Poniamo quindi

$$\rho'(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathrm{F}}(v) - \Lambda^i \frac{\partial v}{\partial x^i} \tag{II,4}$$

dove v è soluzione della relazione (II,4) e verifica le condizioni:

$$v \in \hat{\mathfrak{D}} \quad , \quad v(x, 0) = 0 \quad \text{quasi dappertutto in } \Omega .$$

Allora, per (II,3) e (II,4), la soluzione v del problema Duale è soluzione anche del Problema 1.

Quindi in tale caso sussiste una reciprocità per il Problema 1.

Per materiali bianisotropi lineari, come detto, non è possibile stabilire una reciprocità del tipo (I,22). È pertanto interessante cercare di modificare la relazione di reciprocità in modo da eliminare tale limitazione.

Pertanto, trattando sempre il caso non ereditario, consideriamo l'identità:

$$\int_0^{\mathrm{T}} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{\mathrm{F}}(u)}{\partial t}, v \right)_\Omega - \left(\Lambda^i \frac{\partial u}{\partial x^i}, v \right)_\Omega - (\rho, v)_\Omega \right\} \mathrm{d}t = 0 . \tag{II,5}$$

Se v è una arbitraria funzione tale che $v \in \hat{\mathfrak{D}}$, $v(\mathrm{T}) = 0$ allora si ottiene con le medesime considerazioni utilizzate per pervenire ad (I,20):

$$\int_0^{\mathrm{T}} \left\{ \left(u, \mathrm{A}^u(t) \frac{\partial v}{\partial t} \right)_\Omega - \left(u, \Lambda^i \frac{\partial v}{\partial x^i} \right)_\Omega \right\} \mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{T}} (\rho, v)_\Omega \, \mathrm{d}t = 0 \tag{II,6}$$

dove

$$\mathrm{A}^u(t) = \int_0^1 \partial_{\tau u} \partial_{\tau u} \tilde{\psi}(\tau u(t)) \, \mathrm{d}\tau . \tag{II,7}$$

Consideriamo ora l'analogo del problema duale studiato prima.

DEFINIZIONE 1 (Problema Aggiunto). *Il problema aggiunto consiste nella ricerca di una funzione* $v \in \hat{\mathfrak{D}}$ *tale che per ogni* $\rho^* \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{R}^6))$ *verifichi le seguenti due condizioni nel dominio* $\mathrm{Q}^* = \Omega \times (\mathrm{T}, 0)$:

a') $\mathrm{A}^u(x, t) \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Lambda^i \dfrac{\partial v}{\partial x^i} - \rho^* = 0$ *quasi dappertutto in* Q^*

b') $v(x, \mathrm{T}) = 0$ *quasi dappertutto in* Ω.

Tale problema quindi è molto simile al problema duale considerato, ma risulta impostato sull'intervallo temporale (T, 0).

Si ha così immediatamente da (II,6) e a'):

TEOREMA 1 (Dualità ridotta). *Se* $u, v \in \hat{\mathfrak{D}}$ *sono rispettivamente soluzioni del* Problema 1 *e del* Problema Aggiunto *allora deve essere*:

$$\int_0^{\mathrm{T}} (v(t), \rho(t))_\Omega \, \mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} (u(t), \rho^*(t)) \, \mathrm{d}t . \tag{II,8}$$

Secondo tale formulazione si può stabilire una relazione di dualità anche per materiali bianisotropi, in quanto la condizione (II, 1) non viene richiesta.

2. La condizione di reciprocità, come noto, discende in maniera naturale per i problemi lineari, mentre nel caso non lineare il suo campo di validità risulta alquanto limitato.

Comunque nel caso di una singola equazione non lineare è possibile pervenire ad una formulazione del problema nella cui definizione è contenuta già una forma di dualità, che permette di stabilire una relazione *generalizzata* di reciprocità.

È interessante notare come tali forme di reciprocità si possono mettere in relazione con la *correttezza* del problema considerato, cioè esistenza, unicità e dipendenza continua dei dati per la soluzione del problema.

Infatti sia nel caso lineare che in quello non lineare relativo ad una singola equazione è possibile formulare il problema in maniera corretta.

Consideriamo pertanto in $Q = R^n \times (0, T)$ il problema di Cauchy relativo alla equazione:

$$w_t + \frac{\partial h^i(w)}{\partial x^i} = f \qquad h^i(w) \in C^1 \tag{II,9}$$

$$w\,|_{t=0} = w^0 \tag{II,10}$$

dove $f \in L^2(Q)$ e $w^0 \in L^1(Q)$.

DEFINIZIONE 2 (Kružkov [4]). *Chiameremo soluzione generalizzata del problema* (II,9), (II,10) *in* $Q = R^n \times (0, T)$ *una funzione* $w \in L^\infty(Q)$ *tale che*:

1) *per ogni costante* k *e per ogni* $\varphi \in C^1(Q)$ *limitata e* $\varphi \geq 0$ *verifica*:

$$\int_Q \{|w - k|\,\varphi_t + \operatorname{sign}(w - k)\,(h^i(w) - h^i(k))\,\varphi_{x^i} + \\ + \operatorname{sign}(w - k)\,f\varphi\}\,dx\,dt \geq 0\,; \tag{II,11}$$

2) *per quasi tutti i* $t \in [0, T]$ *la funzione* $w(x, t)$ *è tale che per ogni* $R \geq 0$:

$$\lim_{t \to 0} \int_{|x| \leq R} |w(x, t) - w^0(x)|\,dx = 0\,. \tag{II,12}$$

Se con w' indichiamo una soluzione nel senso generalizzato per il problema:

$$w'_t + \frac{\partial h^i(w')}{\partial x^i} = f' \tag{II,13}$$

$$w'\,|_{t=0} = w^0 \tag{II,14}$$

allora, sotto le stesse ipotesi della Definizione 2 per k e φ, deve risultare:

$$\int_Q \{|w' - k|\,\varphi_t + \operatorname{sign}(w' - k)\,(h^i(w') - h^i(k))\,\varphi_{x^i} + \operatorname{sign}(w' - k)\,f'\varphi\}\,dx\,dt \geq 0\,.$$

Seguendo il medesimo procedimento utilizzato da Kružkov [4] per pervenire al teorema di unicità per il problema (II,9), (II,10) si ottiene la seguente disuguaglianza:

$$\text{(II,15)} \qquad \int_Q \{ | w - w' | \varphi_t + \operatorname{sign}(w - w') (h^i(w) - h^i(w')) \varphi_{x^i} + \\ + \operatorname{sign}(w - w') (f - f') \varphi \} \, dx \, dt \geq 0 .$$

Come si vede, si presenta una reciprocità fra le soluzioni w, w' e le sorgenti f, f'; dualità esistente anche nella definizione di soluzione mediante la (II,11) fra w e k (ricordiamo che k è soluzione (II,9), (II,10) quando $w^0 = k$ e $f = 0$).

La reciprocità espressa da (II,15) si può ulteriormente esplicitare.

A tale scopo se $\gamma \geq 0$, indichiamo con $\{ \delta_\gamma(\sigma) \}$ l'insieme delle funzioni appartenenti a $C^\infty(-\infty, \infty)$ per cui:

$$\delta_\gamma(\sigma) \geq 0 \quad , \quad \delta_\gamma(\sigma) \equiv 0 \quad \text{per} \quad |\sigma| \geq \gamma$$

$$|\delta_\gamma(\sigma)| \leq \frac{\text{cost}}{\gamma} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\gamma(\sigma) \, d\sigma = 1 .$$

Definiamo poi $\alpha_\gamma(\sigma) = \int_{-\infty}^{\sigma} \delta_\gamma(\sigma) \, d\sigma$. Consideriamo i numeri t_0, t_1 appartenenti, a meno di un insieme di misura nulla (vedi [4]) all'intervallo $(0, T_0)$, essendo $t_0 < t_1$ e $T_0 < T$. Le $|w| < M$, $|w'| < M$ e $N = \max_{|w|<M} \left(\sum_{i=1}^{n} (h^i_w) \right)^{1/2}$, poniamo in (II,15):

$$\text{(II,16)} \qquad \varphi = [\alpha_\gamma(t - t_0) - \alpha_\gamma(T - t_1)] \chi^\varepsilon(x, t)$$

dove $\gamma < \min(t_0, T_0 - t_1)$ e $\chi^\varepsilon(x, t) = 1 - \alpha_\gamma(|x| - N(T - t) - r + \varepsilon)$ con $r \geq 0$.

Osserviamo che dalla definizione di $\chi^\varepsilon(x, t)$ risulta:

$$\chi^\varepsilon_t + N | \chi^\varepsilon_x | = 0 .$$

Pertanto da (II,15) si ottiene:

$$\text{(II,17)} \qquad \int_Q [\delta_\gamma(t - t_0) - \delta_\gamma(t - t_1)] \chi^\varepsilon(x, t) | w - w' | \, dx \, dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} \operatorname{sign}(w - w') (f - f') \chi^\varepsilon(x, t) \, dx \, dt \geq 0$$

quindi per $\varepsilon \to 0$:

$$\int_0^T [\delta_\gamma(t-t_0) - \delta_\gamma(t-t_1)] \int_{|x|\leq N(T-t)+r} |w-w'| \, dx \, dt + \tag{II,18}$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{|x|\leq N(T-t)+r} \operatorname{sign}(w-w')(f-f') \, dx \, dt \geq 0$$

infine per $\gamma \to 0$ otteniamo per quasi tutti i $t_0 , t_1 \in [0 , T]$ la disuguaglianza:

$$\int_{|x|\leq N(T-t_1)+r} |w(x, t_1) - w'(x, t_1)| \, dx \leq \int_{|x|\leq N(T-t_0)+r} |w(x, t_0) - w'(x, t_0)| \, dx + \tag{II,19}$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{|x|\leq N(T-t)+r} \operatorname{sign}(w-w')(f-f') \, dx \, dt .$$

Da cui per $t_0 \to 0$, ricordando le condizioni iniziali (II,10), (II,14), si ha:

TEOREMA 2. *Se le funzioni limitate* w , w' ($|w| < M$, $|w'| < M$) *sono soluzioni generalizzate del problema* (II,9), (II,10) *secondo la Definizione 2, allora risulta per quasi tutti i* $t \in [0 , T]$:

$$\int_{|x|\leq N(T-t)+r} |w(x, t) - w'(x, t)| \, dx \leq \int_0^t \int_{|x|\leq N(T-t)+r} \operatorname{sign}(w-w')(f-f') \, dx \, dt . \tag{II,20}$$

Tale disuguaglianza, che esprime una reciprocità fra i problemi considerati, afferma la stabilità della soluzione rispetto alle sorgenti esterne.

Da esse si possono ricavare informazioni interessanti sull'andamento delle soluzioni.

Fra l'altro se:

$$f \geq f' \quad \text{quasi dappertutto in Q}$$

allora

$$w \geq w' \quad \text{quasi dappertutto in Q.}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. FABRIZIO, *Convessità dei potenziali termodinamici nell'elettromagnetismo ereditario*, in corso di stampa, «Atti Acc. Naz. dei Lincei».

[2] J. A. KONG, «Proc. IEEE», *60*, 1036–1946 (1972).

[3] J. A. KONG, «Proc. IEEE (lett.)», *58*, 1966–1967 (1967).

[4] S. N. KRUŽKOV, «Math. USSR Sb», *10*, 217–243 (1970).