Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Alvaro Gonzalez Villalobos

# Teoremi limiti funzionali per sistemi moltiplicativi. Nota III

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **55** (1973), n.6, p. 686–691.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_6_686_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma*
*bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*
*SIMAI & UMI*
http://www.bdim.eu/

**Probabilità.** — *Teoremi limiti funzionali per sistemi moltiplicativi.* Nota III di ALVARO GONZÁLEZ VILLALOBOS, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this part III (cf. [1] and [2]) we prove a functional limit theorem for random elements in the space (D, $\mathfrak{D}$) constructed on the basis of the partial sums of a series $\sum_{j=1}^{\infty} a_j r_j(h) \psi_j(x)$, where $\{r_j(h)\}$ denotes the system of Rademacher functions, $a_j \in \mathbf{R}$, and $\{\psi_j(x)\}$ is a uniformly bounded orthonormal system in the interval [0, 1]. We also consider the linear means of $\Sigma a_j \psi_{n_j}(x)$, where $\{\psi_j\}$ is the Walsh orthonormal system and $n_{j+1}/n_j \geq \geq q > 1$.

1. Denotiamo con $\{r_j(h)\}$, $j = 1, 2, \cdots$, il sistema di Rademacher definito nell'intervallo $[0, 1]$. Sia $\{\psi_j(x)\}$, $j = 1, 2, \cdots, x \in [0, 1]$, un sistema ortonormale limitato ($|\psi_j(x)| \leq K$) di funzioni reali, e sia $\{a_j\}$, $j = 1, 2, \cdots$, una successione di numeri reali. Poniamo

$$A_m = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j^2\right)^{1/2}, \quad A_0 = 0,$$

$$\sigma_k^{(h)}(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j r_j(h) \psi_j(x) \qquad \text{per} \quad h \in [0, 1], \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

e

$$\sigma_0^{(h)}(x) \equiv 0.$$

TEOREMA 9. *Supponiamo che il sistema* $\{\psi_j\}$ *soddisfi alle seguenti condizioni*:

$$(a) \quad \int_0^1 \psi_i^2(x) \psi_j^2(x) \, dx = 1, \qquad i \neq j;$$

$$(b) \quad \int_0^1 \psi_i^2(x) \psi_j(x) \psi_k(x) \, dx = 0, \qquad i \neq j \neq k;$$

$$(c) \quad \int_0^1 \psi_i(x) \psi_j(x) \psi_k(x) \psi_p(x) \, dx = 0, \qquad i \neq j \neq k \neq p;$$

*e che la successione* $\{a_j\}$ *sia tale che*

$$\text{(i)}\ A_m \to \infty; \qquad \text{(ii)} \max_{1 \leq j \leq m} a_j^2 = O(A_m^{2\beta}), \quad 0 < \beta < 1.$$

(*) Nella seduta del 15 dicembre 1973.

*Se* $X_m^{(h)}(x,t) = A_m^{-1}\sigma_k^{(h)}(x)$ *per* $t \in [A_m^{-2}A_k^2, A_m^{-2}A_{k+1}^2]$, $k = 0, 1, \cdots, m$ (1); *e se* P *è una misura di probabilità in* $([0,1], \mathcal{B})$ (2) *assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, allora esiste* $A \subset [0,1]$ *tale che* $P(A) = 0$ *e per ogni* $h \notin A$

$$X_m^{(h)} \xrightarrow{m\to\infty} W \quad \textit{in} \quad (D, \mathcal{D}).$$

*Inoltre*, A *può essere scelto indipendentemente da* P.

*Dimostrazione*. Poggiando sulle proprietà (*b*) e (*c*) e sulla diseguaglianza di Bessel, è facile vedere che

$$\int_0^1 [\sigma_m^{(h)}(x) - \sigma_n^{(h)}(x)]^4 \, dx \leq C (A_m^2 - A_n^2)^2, \tag{9.1}$$

dove C è una costante indipendente da $n, m \ (n < m)$ e $h \in [0,1]$ (3).

Per il momento supponiamo che P abbia la seguente proprietà:

$$P(B) = |B_0|^{-1} |B \cap B_0| \tag{9.2}$$

per tutti i $B \in \mathcal{B}$, dove $B_0 \subset [0,1]$ è un insieme fisso, $|B_0| > 0$.

In queste ipotesi, da (9.1) si deduce che

$$\{X_m^{(h)}\} \quad \text{è «tight» in} \quad (D, \mathcal{D}) \tag{9.3}$$

per ogni $h \in [0,1]$ (cfr. [1], Teorema 3, formule (3.3)–(3.7)).

Proviamo che esiste un $A \subset [0,1]$ tale che $P(A) = 0$, A non dipende da P e per ogni $h \notin A$ e per ogni $p$–upla $(\xi_1, \cdots, \xi_p)$ e $0 \leq t_1 < \cdots < t_p \leq 1$ di numeri razionali, si ha

$$\sum_{i=1}^{p} \xi_i X_m^{(h)}(\cdot, t_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \xi_i W_{t_i}(\cdot). \tag{9.4}$$

Posto

$$\sum_{i=1}^{p} \xi_i X_m^{(h)}(x, t_i) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i A_m^{-1} \sum_{j=1}^{k_i} a_j r_j(h) \psi_j(x),$$

dove $k_i = k_i(m, t_i)$, si ha

$$\sum_{i=1}^{p} \xi_i X_m^{(h)}(x, t_i) = A_m^{-1} \sum_{j=1}^{m} b_{m,j} r_j(h) \psi_j(x) \equiv S_m^{(h)}(x) \tag{9.5}$$

(1) Scriveremo $k = k(m, t)$.

(2) Salvo avviso contrario, le notazioni sono quelle stesse usate in [1] e [2].

(3) Il Teorema 9 resta vero per un sistema ortonormale uniformemente limitato $\{\psi_j\}$ che soddisfi alla (*a*), purché valga la (9.1). In particolare, se $\psi_j(x) = 2^{1/2} \cos 2\pi n_j x$ ed $n_j$ è una successione lacunare, le condizioni (*a*), (*b*) e (*c*) possono essere eliminate.

con

$$(9.6) \qquad b_{m,j} = a_j \sum_{i=1}^{p} \xi_i \, \delta_{k_i,j} \quad \text{per} \quad j \leq m \, , \, b_{m,j} = 0 \quad \text{per} \quad j > m$$

ed inoltre $\delta_{k_i,j} = 1$ se $j \leq k_i$ e $\delta_{k_i,j} = 0$ negli altri casi.

Se $B_m^2 = \sum_{j=1}^{m} b_{m,j}^2$, è facile vedere che

$$(9.7) \qquad \lim_{m \to \infty} A_m^{-2} B_m^2 = \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 \, t_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \xi_i \, \xi_j \, t_i \equiv L \, .$$

Pertanto la (9.4) sarà stabilita non appena mostreremo l'esistenza di un $A \subset [0, 1]$ tale che $P(A) = 0$, A non dipende da $B_0$ e, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, $h \notin A$,

$$(9.8) \qquad F_{m,h}(\lambda) = | B_0 |^{-1} \, | \{ x \in B_0 : A_m^{-1} S_m^{(h)}(x) \leq \lambda \} | \xrightarrow{m \to \infty} N(0, L)[\lambda] \, .$$

Chiaramente la (9.8) è vera se lo è nel caso che $B_0$ sia un intervallo della forma $(0, a)$ con $a$ razionale, $0 < a < 1$. Per dimostrare (9.8) con $B_0 = (0, a)$ si può procedere come nella dimostrazione del Teor. 1 di [1], fino ad arrivare a

$$(9.9) \quad \varphi_{m,h}(\lambda) = o(1) + (\exp(-\lambda^2 L/2)) \, a^{-1} \int_0^a \prod_{j=1}^{m} (1 + i\lambda A_m^{-1} \, b_{m,j} \, r_j(h) \, \psi_j(x)) \, dx ,$$

dove $\varphi_{m,h}$ è la funzione caratteristica di $F_{m,h}$.

Pertanto rimane soltanto da provare che

$$(9.10) \quad K_m(h) \equiv -a + \int_0^a \prod_{j=1}^{m} (1 + i\lambda A_m^{-1} \, b_{m,j} \, r_j(h) \, \psi_j(x)) \, dx \xrightarrow{m \to \infty} 0 \quad \text{q. o.} \, (h).$$

Dalla (ii) segue

$$(9.11) \qquad \int_0^1 | K_m(h) |^2 \, dh = O(A_m^{2(\alpha-1)})$$

(cfr. [4], pp. 262–263) [4]. Fissiamo $\theta > 1$, e sia $n_j$ il primo intero tale che $\theta^j \leq A_{n_j}^2 < \theta^{j+1}$ (tale intero esiste sempre per $j$ abbastanza grande, cfr. [4], p. 247). Dalla (9.11) si deduce

$$(9.12) \qquad \varphi_{n_j,h}(\lambda) \xrightarrow{j \to \infty} \exp(-\lambda^2 L/2) \qquad q. o. \, (h).$$

(4) Il Teorema (3.4.1) di Salem e Zygmund (cfr. [4], 261–263) si può generalizzare immediatamente ad una successione doppia $b_{m,j}$ tale che $b_{m,j} \geq 0$, $b_{m,j} = 0$ per $j > m$ e $b_{m,j}$ crescente con $m$. Ma questa condizione è troppo restrittiva per i nostri scopi.

Per $n_j \leq m < n_{j+1}$, si ha

$$(9.13)\qquad |\varphi_{m,h}(\lambda) - \varphi_{n_j,h}(\lambda)| \leq a^{-1}|\lambda| \int_0^a |A_m^{-1} S_m^{(h)}(x) - A_{n_j}^{-1} S_{n_j}^{(h)}(x)|\, dx \leq$$

$$\leq a^{-2}\lambda^2 \left\{ A_m^{-2} \int_0^1 (S_m^{(h)} - S_{n_j}^{(h)})^2\, dx + (A_{n_j}^{-1} - A_m^{-1})^2 \int_0^1 [S_{n_j}^{(h)}]^2\, dx + \right.$$

$$\left. + 2(A_{n_j}^{-1} - A_m^{-1}) \left[ \int_0^1 (S_{n_j}^{(h)})^2\, dx \right]^{1/2} A_m^{-1} \left[ \int_0^1 (S_m^{(h)} - S_{n_j}^{(h)})^2\, dx \right]^{1/2} \right\}.$$

Per ogni $h \in [0, 1]$ otteniamo

$$(9.14)\qquad (A_{n_j}^{-1} - A_m^{-1})^2 \int_0^1 (S_{n_j}^{(h)}(x))^2\, dx = (A_{n_j}^{-1} - A_m^{-1})^2 B_{n_j}^2 \leq$$

$$\leq A_{n_j}^{-2}(A_{n_j}^{-2} A_{n_{j+1}}^2 - 1) B_{n_j}^2 \leq (\theta^2 - 1) A_{n_j}^{-2} B_{n_j}^2,$$

$$(9.15)\qquad A_m^{-2} \int_0^1 (S_m^{(h)} - S_{n_j}^{(h)})^2\, dx \leq$$

$$\leq p\left(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^2\right)[(\theta^2 - 1) + (A_m^{-2} A_{s_1}^2 - A_{n_j}^{-2} A_{k_1}^2 \theta^{-2}) + \cdots + (A_m^{-2} A_{s_p}^2 - A_{n_j}^{-2} A_{k_p}^2 \theta^{-2})],$$

dove $k_i = k_i(n_j, t_i)$, $s_i = s_i(m, t_i)$.

Combinando le (9.14), (9.15), (9.13) e (9.12) si ottiene subito la (9.4).

Siano ora $\xi_1, \cdots, \xi_p \in \mathbf{R}$ e $\xi_1^*, \cdots, \xi_p^*$, $0 \leq t_1 < \cdots < t_p \leq 1$ razionali. Se $\max\limits_{1 \leq i \leq p} |\xi_i - \xi_i^*|^2 \leq p^{-3} \varepsilon^3 |B_0|$ valgono le:

$$P\left( \left| \sum_1^p (\xi_i - \xi_i^*) X_m^{(h)}(x, t_i) \right| > \varepsilon \right) \leq$$

$$\leq |B_0|^{-1} \varepsilon^{-2} p^2 \max_{1 \leq i \leq p} |\xi_i - \xi_i^*|^2 \cdot \sum_{i=1}^{p} A_m^{-2} A_{k_i}^2 < \varepsilon,$$

$$P^*\left( \left| \sum_1^p (\xi_i - \xi_i^*) W_{t_i}(\cdot) \right| > \varepsilon \right) \leq \varepsilon^{-2} p^3 \max_{1 \leq i \leq p} |\xi_i - \xi_i^*|^2 < \varepsilon.$$

Pertanto

$$P^*\left( \sum_1^p \xi_i W_{t_i}(\cdot) \leq \lambda - 2\varepsilon \right) - 2\varepsilon \leq \varliminf_{m \to \infty} P\left( \sum_1^p \xi_i X_m^{(h)}(\cdot, t_i) \leq \lambda \right) \leq$$

$$\leq P^*\left( \sum_1^p \xi_i W_{t_i}(\cdot) < \lambda + 2\varepsilon \right) + 2\varepsilon$$

per quasi–tutti gli $h$, indipendentemente da $B_0$.

Allora, il teorema di Cramér–Wold implica

$$(9.16)\qquad (X_m^{(h)}(\cdot\,,t_1),\cdots,X_m^{(h)}(\cdot\,,t_p))\Rightarrow(W_{t_1}(\cdot),\cdots,W_{t_p}(\cdot))$$

per $t_i$ razionali e quasi tutti gli $h$, indipendentemente da $B_0$. Al fine di estendere la (9.16) a tutti i valori reali $0\leq t_1<\cdots<t_p\leq 1$, consideriamo dei razionali $0\leq t_1^*<\cdots<t_p^*\leq 1$ tale che $0\leq \max_{1\leq i\leq p}(t_i-t_i^*)<p^{-1}\varepsilon^3\,|\,B_0\,|$. Allora,

$$\sum_{i=1}^{p} P(|\,X_m^{(h)}(x\,,t_i)-X_m^{(h)}(x\,,t_i^*)\,|>\varepsilon)\leq p\varepsilon^{-2}\,|\,B_0\,|^{-1}\max_{1\leq i\leq p}|\,t_i-t_i^*\,|<\varepsilon\,,$$

e così

$$P^*\Big(\bigcap_{i=1}^{p}\{W_{t_i^*}(\cdot)\leq\lambda_i-\varepsilon\}\Big)-\varepsilon\leq\varliminf_{m\to\infty}P\Big(\bigcap_{1}^{p}\{X_m^{(h)}(x\,,t_i)\leq\lambda_i\}\Big)\leq$$

$$\leq P^*\Big(\bigcap_{1}^{p}\{W_{t_i^*}(\cdot)\leq\lambda_i+\varepsilon\}\Big)+\varepsilon$$

per quasi ogni $h$, indipendentemente da $B_0$. Pertanto

$$(X_m^{(h)}(\cdot\,,t_1),\cdots,X_m^{(h)}(\cdot\,,t_p))\xRightarrow{m\to\infty}(W_{t_1}(\cdot),\cdots,W_{t_p}(\cdot))$$

q.o. $(h)$, indipendentemente da $B_0$.

Di conseguenza, per la (9.3),

$$(9.17)\qquad X_m^{(h)}\Rightarrow W\quad \text{in}\quad (D\,,\mathfrak{D})\,,$$

q.o. $(h)$, indipendentemente da P, purché P soddisfi la (9.2). La condizione (9.2) può essere eliminata per le ragioni esposte nella dimostrazione del teor. 3 di [1]; pertanto il teor. 9 è dimostrato.

2. Terminiamo mostrando come i metodi usati permettano di generalizzare un teorema di Morgenthaler (cfr. [3], Th. XXVII, 500–505) stabilendo un risultato simile al teor. 3 di [1].

Sia $\{\psi_j(x)\}$, $j=1\,,2\,,\cdots$, il sistema ortonormale di Walsh, cioè il completamento del sistema di Rademacher. Se $\{\psi_{n_j}\}$ è una successione lacunare, $n_{j+1}/n_j\geq q>1$, allora la corrispondente successione $\{X_m(\omega\,,t)\}$ di elementi aleatori definita nel teor. 3 di [1] è «tight» in $(D\,,\mathfrak{D})$. Infatti, la (3.1) nella dimostrazione del teor. 3 è ovviamente valida per $1\geq 3$, e pertanto dalla diseguaglianza di Jensen è facile vedere che lo è anche per $l<q<3$. Di conseguenza, il teor. 2 (cfr. [1]) implica che il teor. 3 vale per ogni successione $q$–lacunare $\{\psi_{n_j}\}$ con $q\geq 3$. Questo risultato generalizza il citato teorema di Morgenthaler nel caso $q\geq 3$. Osserviamo infine che questo teorema si può estendere (cfr. [1], teoremi 1 e 2) a successioni doppie. Da ciò si deduce che il teor. 3 è vero per ogni sottosuccessione $\{\psi_{n_j}\}$ del sistema di Walsh, con $n_{j+1}/n_j\geq q>1$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] A. GONZÀLEZ VILLALOBOS, *Teoremi limiti funzionali per sistemi moltiplicativi*, I, « Rend. Accad. Naz. Lincei » *55* (3-4), 228-235 (1973).
[2] A. GONZÁLEZ VILLALOBOS, *Teoremi limiti funzionali per sistemi moltiplicativi*, II, « Rend. Accad. Naz. Lincei » *55* (5), 415-419 (1973).
[3] G. W. MORGENTHALER, *On Walsh-Fourier series*, « Transactions Am. Math. Soc. », *84*, 472-507 (1957).
[4] R. SALEM e A. ZYGMUND, *Some properties of trigonometric series whose terms have random signs*, « Acta Math. », *91*, 245-301 (1954).