André Batbedat

Préanneaux booléens. Préanneaux zéro-neutres

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.6, p. 645–649.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_6_645_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Algebra. — *Préanneaux booléens. Préanneaux zéro-neutres.* Nota II di ANDRÉ BATBEDAT, presentata (*) dal Corrisp. G. ZAPPA.

RIASSUNTO. — Si prosegue lo studio iniziato in [6], dei preanelli idempotenti, mettendo l'accento su due casi particolari; ciò permette di terminare con una nuova presentazione della loro struttura.

INTRODUCTION

Cette Note fait suite à celle intitulée: *Préanneaux idempotents* (voir: « Rend. Acc. Lincei », 55, 325–330 (1973)); nous en conservons les notations et utilisons les propriétés.

Le résultat fondamental du Théorème III.5 est appliqué ici, en IV, à quelques cas particuliers; deux d'entr'eux préanneau booléen et préanneau zéro-neutre permettent, au Chapître V, d'exprimer tout préanneau idempotent comme un produit canonique à deux composantes.

IV. QUELQUES CAS PARTICULIERS

Soit Q un préanneau (non nécessairement idempotent): les propriétés suivantes pour $q \in Q$ apparaissent comme des généralisations des notions de neutre ou de zéro; on note respectivement: T, U, V, W:

T : $q \vee x \vee q = q$;
U : $qxq = q$;
V : $qxq = xq$ (ou encore: $q \vee xq = q$);
W : $qxq = qx$ (ou encore: $qx \vee q = q$);

chaque égalité étant vérifiée pour tout $x \in Q$.

On note (T) [resp.: (U), (V), (W)] l'ensemble des éléments qui vérifient la proprieté entre parenthèses. Un élément de (T) est un T-élément, un élément de (T) $\cap$ (U) est TU-élément, etc...

Exemples:

i) q est zéro à droite [resp.: à gauche] si et seulement si c'est un UV [resp.: UW] élément.

ii) q est neutre à droite [resp.: à gauche] si et seulement si c'est un TW [resp.: TV] idempotent.

iii) q est central si et seulement si c'est un VW-élément.

iv) Soit A le préanneau idempotent du II: Si B [resp.: C, D, E] est trivial alors k est un T [resp. U, V, W] élément.

(*) Nella seduta del 26 novembre 1973.

Ce dernier exemple montre que les propriétés T , U , V , W sont indépendantes.

Soit P un préanneau idempotent et $p \in$ P: si p est un T [resp.: U , V , W] élément, la décomposition du III peut être simplifiée en pointant sur p $(k = p)$ et en oubliant B [resp.: C , D , E] qui est trivial.

Une situation aussi favorable ne se présente pas nécessairement en pointant ailleurs qu'en p comme le montre le cas d'un anneau booléen. Cependant si D est trivial k vérifie V, or:

LEMME IV.1. *Si p vérifie* V *alors* (V) = P.

Preuve. P pointé en p est isomorphe à B×C×E et dans B , C ou E tout élément vérifie V.

Il résulte de ce lemme et de son dual la:

PROPOSITION IV.2. *Dans la décomposition du III, la propriété*: D [*resp.*: E] *est trivial, est indépendante de k.*

COROLLAIRE IV.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) *Quel que soit k* , D *et* E *sont triviaux*;

ii) P *contient un élément central*;

iii) P *contient un* V–*élément et un* W–*élément.*

PROPOSITION IV.4. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) P *contient un zéro à droite*;

ii) P *contient un* U–*élément et un* V–*élément*;

iii) P *est isomorphe au produit d'un anneau booléen par un préanneau neutre à gauche* (*zéro à droite*).

Preuve. ii) *implique* iii). Compte tenu de la Proposition IV.2 il suffit de pointer sur le U–élément...

Proposition analogue en échangeant droite et gauche.

Lorsque P s'écrit B×E, E est l'ensemble des zéros à droite de P d'où le:

COROLLAIRE IV.5. *Tout préanneau idempotent qui contient un unique zéro à droite ou à gauche est un anneau booléen.*

PROPOSITION IV.4 DUALE. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) P *contient un neutre à droite*;

ii) P *contient un* T–*élément et un* W–*élément*;

iii) P *est isomorphe au produit d'un préanneau idempotent unitaire par un préanneau neutre à droite.*

COROLLAIRE IV.5 DUAL. *Tout préanneau idempotent qui contient un unique neutre à droite ou à gauche est un préanneau idempotent unitaire.*

Les propriétés de ces corollaires peuvent s'exprimer sous des hypothèses affaiblies, en effet: si P contient un unique T–élément p, alors B est trivial en pointant sur p; comme dans D ou E tout élément vérifie T, l'hypothèse d'unicité du T–élément implique que D et E sont triviaux. Ainsi:

Tout préanneau idempotent qui contient un unique T–élément est un préanneau idempotent unitaire.

Dualement tout préanneau idempotent qui contient un unique U–élément est un anneau booléen.

PROPOSITION IV.6. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) P *contient un zéro à droite et un neutre à gauche*;

ii) P *contient un* T–*élément*, *un* U–*élément et un* V–*élément*;

iii) P *est isomorphe au produit d'un anneau booléen unitaire par un préanneau neutre à gauche*.

Preuve. Compte tenu de la Proposition IV.2 nous pointons sur un T–élément et P est isomorphe à $C \times E$ comme il contient un U–élément (c_0, e_0) on voit que c_0 est zéro dans C.

Propriété analogue en échangeant gauche et droite, V et W.

LEMME IV.7. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) P *contient un* TU–*élément*;

ii) (T) = P;

iii) (U) = P.

Preuve. Soit p un TU–élément: pointant sur p, pour la décomposition du III, B et C sont triviaux et tout élément de D ou de E est un TU–élément.

Si d'autre part, k est un U–élément de P , C est trivial dans la décomposition du III et l'hypothèse (U) = P implique B trivial. De même si (T) = P.

Il résulte de ce lemme la:

PROPOSITION IV.8. *Dans la décomposition du III la propriété*: B et C *sont triviaux*, *est indépendante de* k.

V. PRÉANNEAUX BOOLÉENS ET PRÉANNEAUX ZÉRO–NEUTRES

Dans [4], P. Janin définit un *préanneau booléen* H comme un ensemble muni:

PB 1): D'une loi ternaire commutative, notée: $a + b + c$, et vérifiant:

$(a + b + c) + d + e = a + b + (c + d + e)$ (associativité faible);

$a + b + c = a + b + d$ implique $c = d$ (simplification à gauche).

PB 2): D'un produit binaire associatif, commutatif, idempotent et distributif pour la loi ternaire.

PROPOSITION V.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) *Préanneau booléen* (*au sens précédent*);

ii) *Préanneau idempotent*, *commutatif*;

iii) *Préanneau idempotent*, *commutatif et de caractéristique* 2.

Preuve. i) *implique* ii). Il est établi dans [4] que pour tout $a \in \mathrm{H}$: $a + a + a = a$; par conséquent ([3]) H est un groupe ternaire tripotent; c'est donc (avec PB 2) un préanneau au sens des chapitres précédents.

ii) *implique* iii). Corollaire IV.3.

iii) *implique* i). Par le Théorème I.3 la loi ternaire vérifie PB 1).

Par contre un préanneau idempotent de caractéristique 2 n'est pas nécessairement commutatif.

Il résulte maintenant du Corollaire IV.3 les deux propositions suivantes:

PROPOSITION V.2. *Tout préanneau booléen est isomorphe à un produit d'un anneau booléen par un préanneau idempotent unitaire.*

PROPOSITION V.3. *Tout préanneau idempotent qui contient un* V*-élément et un* W*-élément (en particulier un élément central) est un préanneau booléen.*

Ces deux résultats peuvent encore être déduits de [5] à partir de la proposition 25 et de l'exemple 16.

La Proposition V.2 permet d'étendre à un préanneau booléen H les propriétés classiques des anneaux booléens concernant les structures topologiques et ordonnées.

Une étude directe très complète a été faite dans [4].

Indiquons l'essentiel concernant l'ordre: on sait qu'il existe une correspondance biunivoque canonique entre les demi-groupes idempotent commutatifs [resp.: les anneaux booléens unitaires] et les inf-demi-treillis [resp.: treillis distributifs complémentés]; P. Janin a établi *une correspondance biunivoque canonique entre les préanneaux booléens et les treillis distributifs relativement complémentés.*

DÉFINITION V.4. *Un préanneau* N *est* zéro-neutre *s'il est isomorphe à un produit d'un préanneau neutre à droite par un préanneau neutre à gauche.*

Pour un préanneau zéro-neutre, tout élément est un TU-élément donc, pour la décomposition du III, B et C sont triviaux (voir aussi Proposition IV.8).

PROPOSITION V.5. *Soit* N *un préanneau zéro-neutre et* $k \in \mathrm{N}$: $\mathrm{N}k$ [*resp.*: $k\mathrm{N}$] *est un sous-préanneau neutre à droite* [*resp.*: *gauche*].

N *est isomorphe au produit de* $\mathrm{N}k$ *par* $k\mathrm{N}$.

La structure de $\mathrm{N}k$ *et de* $k\mathrm{N}$ *est indépendante de* k.

Preuve: Soit R [resp.: S] un préanneau neutre à droite [resp.: à gauche], N le préanneau zéro-neutre $\mathrm{R} \times \mathrm{S}$ et $k = (r_0, s_0)$: dans la décomposition du III, D est l'ensemble des $k \vee xk = xk = (r, s_0)$; c'est donc un sous-préanneau qui peut être identifié à R (Lemme II.1). De même E est l'ensemble des kx et c'est un sous-préanneau qui peut être identifié à S.

Les propriétés i), ii), iii) du Lemme IV.7 sont autant de caractérisations de la propriété zéro-neutre pour un préanneau idempotent. En voici d'autres que l'on établit aisément:

PROPOSITION V.6. *Soit* P *un préanneau idempotent; les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) P *est un préanneau zéro-neutre.*

ii) $ab = b \vee a$ *pour tous* a , b *de* P.

ii) (bis) *Il existe* $p \in \mathrm{P}$ *tel que pour tout* $x \in \mathrm{P} : px = x \vee p$ [*resp.*: $xp = p \vee x$].

iii) $ab + ba - a = b$ *pour tout* a , b *de* P.

iii) (bis) *Il existe* p *tel que pour tout* $x \in \mathrm{P} : xp + px - x = p$.

Nous sommes maintenant en mesure d'associer à tout préanneau idempotent une décomposition canonique.

Soit P un préanneau idempotent, $k \in \mathrm{P}$ et $\mathrm{B} \times \mathrm{C} \times \mathrm{D} \times \mathrm{E}$ la décomposition du III pour P pointé en k: $\mathrm{H} = \mathrm{B} \times \mathrm{C}$ est un préanneau booléen, $\mathrm{N} = \mathrm{D} \times \mathrm{E}$ est un préanneau zéro-neutre et $\mathrm{P} = \mathrm{H} \times \mathrm{N}$.

LEMME V.7. *La décomposition* $\mathrm{P} = \mathrm{H} \times \mathrm{N}$ *est indépendante de* k.

Preuve. Soit $p = (h_0 , n_0) \in \mathrm{P}$: l'ensemble des $p \vee x \vee p + pxp - p$ [resp.: $p \vee xp + px \vee p - p$] pour x parcourant P est l'ensemble H′ des (h , n_0) [resp.: N′ des (h_0 , n)]; on applique le Lemme II.1.

Avec les notations de ce Lemme H [resp.: N] est appelé la *composante booléenne* [resp.: *zéro-neutre*] *pour* P.

Nous pouvons alors conclure par le:

THÉORÈME V.8. *Tout préanneau idempotent est isomorphe au produit de sa composante booléenne par sa composante zéro-neutre.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BATBEDAT, *Une généralisation de la notion d'espace affine*, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris », *276*, A–169 (1973).

[2] A. BATBEDAT, *Préalgèbres*, « Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris », *276*, A–783, (1973).

[3] A. BATBEDAT, *Sur la notion d'élément inversible dans un binaire ou dans un ternaire*, « Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris », *277*, A–409 (1973).

[4] P. JANIN, *Une généralisation des structures booléennes*. Thèse de 3ème cycle, faculté des sciences de Lyon 1966.

[5] P. JANIN, *Préanneaux*. Thèse de doctorat, faculté des sciences de Lyon (1968).

[6] A. BATBEDAT, *Préanneaux idempotents*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », *55*, 325–330 (1973).