Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Mauro Fabrizio

# Dualità e reciprocità per le equazioni nonlineari dell'elettromagnetismo ereditario. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **55** (1973), n.5, p. 420–428.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_420_0>

**Fisica matematica.** — *Dualità e reciprocità per le equazioni non lineari dell'elettromagnetismo ereditario* (*). Nota I di MAURO FABRIZIO, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

RÉSUMÉ. — On formule quelques théorèmes de dualité relatifs aux équations de l'électromagnétisme pour des matériaux à mémoire.

On applique, entre autres, ces théorèmes pour établir le champ électrique émis par une antenne parallèle à une surface d'un supraconducteur.

## INTRODUZIONE

Questo lavoro fa parte di una mia ricerca sull'elettromagnetismo ereditario e segue la Nota *Convessità dei potenziali termodinamici nell'elettromagnetismo ereditario* di recente pubblicazione [1] su questi stessi Atti Accademici. Tale Nota la indicheremo in seguito col simbolo (F) e ad essa faremo riferimento anche per le notazioni e le definizioni.

In codesto studio, ho affrontato il problema di stabilire una relazione di *reciprocità* nel campo dei fenomeni elettromagnetici per materiali con *memoria* e *non lineari*.

In particolare ho dimostrato, come si possa costruire un problema lineare associato a quello non lineare, in modo che fra i due problemi sussista un teorema di *dualità* del tutto simile alla tradizionale equazione di reciprocità.

Tali teoremi di dualità sono senz'altro interessanti. Attraverso una loro utilizzazione, ho potuto infatti estendere a materiali non lineari ed eventualmente ereditari il risultato di D. Graffi [2] che stabilisce come il campo elettrico generato da una antenna parallela ad una superficie perfettamente riflettente è nullo.

Inoltre, ancora mediante il teorema di dualità è possibile ricondurre la dimostrazione dell'unicità del problema non lineare all'esistenza del problema lineare associato [3], [4], viceversa è sufficiente dare dei controesempi al teorema di unicità per dimostrare la non esistenza di soluzioni del problema lineare [5].

Questo mio lavoro è stato suddiviso in due Note. Nella seconda ho ricercato le condizioni sotto le quali è possibile pervenire ad una relazione di reciprocità «*stretta*». Ho verificato fra l'altro che, poiché codesta reciprocità non sussiste allorquando il materiale è bianisotropo, è possibile eliminare tale restrizione, impostando il problema aggiunto sull'intervallo temporale «rovesciato» (T , 0).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 26 novembre 1973.

In ogni caso, una formulazione di un teorema di reciprocità per problemi non lineari sussiste sotto ipotesi abbastanza restrittive. Nel caso però di una singola equazione non lineare, ho dimostrato come una impostazione del problema mediante una *disuguaglianza variazionale*, conduce sempre in maniera naturale ad una condizione di reciprocità, da cui si possano ricavare interessanti informazioni sull'andamento delle soluzioni.

## DUALITÀ E RECIPROCITÀ

Il problema ai valori iniziali e al contorno che studieremo è precisato nel n. 1 di [1]. Comunque consiste nella determinazione di un *processo elettromagnetico* (cioè l'insieme dei campi $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \mathbf{q}, \varepsilon$) che verifica il sistema delle equazioni di Maxwell, nel dominio $Q = \Omega \times (0, T)$:

$$\partial \mathbf{D}/\partial t = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J} \tag{I.1}$$

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = -\nabla \times \mathbf{E} + \mathrm{I} \tag{I,2}$$

o l'equivalente

$$\partial \mathrm{F}/\partial t = \Lambda^i \, \partial u/\partial u_i + \rho \tag{I,3}$$

dove, come in [1] abbiamo posto: $u = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$, $\mathrm{F} = (\mathbf{D}, \mathbf{B})$, $\rho = (-\mathbf{J}, \mathrm{I})$.

Inoltre sono soddisfatte le ulteriori condizioni iniziali (1):

$$\mathbf{E}^0(x, s) = \hat{\mathfrak{e}}^0(x, s) \quad ; \quad \mathbf{H}^0(x, s) = \hat{\mathfrak{h}}^0(x, s) \qquad \text{per} \quad x, s \in \Omega \times [0, \infty) \tag{I,4}$$

essendo $\hat{\mathfrak{e}}^0, \hat{\mathfrak{h}}^0$ vettori noti in $\Omega \times [0, \infty)$ e per ogni $x \in \Omega$ appartenenti allo spazio $\mathfrak{H}$ definito in [1]. Mentre sul contorno $\partial\Omega$ di $\Omega$, che supponiamo sufficientemente regolare:

$$\mathbf{E} \times \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{su} \quad \partial\Omega \times (0, T) \tag{I,5}$$

dove con $\boldsymbol{n}$ indichiamo la normale esterna al dominio $\Omega$.

Infine il materiale, poiché supporremo che $\mathbf{J}$ e $\mathbf{I}$ sono funzioni note in $Q$, è caratterizzato dall'insieme dei due funzionali $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}$ che determinano il valore di $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ come funzione delle storie $\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t) \\ \mathbf{B} &= \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t) . \end{aligned} \tag{I,6}$$

Osserviamo che in virtù di (I,6) e (I,4) si ha:

$$\mathbf{D}(x, 0) = \tilde{\mathbf{D}}(\hat{\mathfrak{e}}^0, \hat{\mathfrak{h}}^0) \qquad \mathbf{B}(x, 0) = \tilde{\mathbf{B}}(\hat{\mathfrak{e}}^0, \hat{\mathfrak{h}}^0) . \tag{I,7}$$

Nel seguito supporremo i funzionali $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}$, omogenei in $\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t$, quindi:

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0 \qquad \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0 . \tag{I,8}$$

(1) Con $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ rappresentiamo le storie iniziali di $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, cioè le storie relative all'istante $t = 0$.

Al fine di dare una precisa ed ampia definizione di soluzione e di pervenire ad una più vasta formulazione dei problemi di dualità, è necessario introdurre alcuni spazi di funzioni.

Se $\boldsymbol{e}$ rappresenta una funzione da $\Omega \to R^3$, indichiamo:

$$\text{(I,9)} \qquad L^2(\Omega\,;R^3) = \left\{ \boldsymbol{e} : \ \boldsymbol{e} \text{ è misurabile in } \Omega\,, \int_\Omega |\boldsymbol{e}|^2 \, dx < \infty \right\}$$

$$W = \{\boldsymbol{e} : \ \boldsymbol{e} \in L^2(\Omega\,;R^3)\,, \nabla \times \boldsymbol{e} \in L^2(\Omega\,;R^3)\} \text{ (2)}$$

$$W_0 = \left\{ \boldsymbol{e} : \ \boldsymbol{e} \in W\,, \int_\Omega \boldsymbol{e} \cdot \nabla \times \boldsymbol{h} \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{h} \cdot \nabla \times \boldsymbol{e} \, dx \text{ per tutti gli } \boldsymbol{h} \in W \right\}$$

W risulta uno spazio di Hilbert se definiamo come prodotto scalare:

$$(\boldsymbol{e}\,,\boldsymbol{h})_W = \int_\Omega \{(\boldsymbol{e}\,,\boldsymbol{h}) + (\nabla \times \boldsymbol{e}\,, \nabla \times \boldsymbol{h})\} \, dx\,.$$

Mentre $W_0$, secondo tale metrica, risulta un sottospazio chiuso di W. Lo spazio delle funzioni **E** definite e misurabili in $I = (0\,,T)$ a valori in uno spazio di Hilbert H per cui $\int_I |\mathbf{E}|_H \, dt < \infty$ lo indicheremo con $L^2(I\,,H)$.

Nel seguito H potrà essere $L^2(\Omega\,;R^3)$, W o $W_0$.

Inoltre

$$\text{(I,10)} \qquad L^{2,1}(I\,,H) = \left\{ \mathbf{E} : \ \mathbf{E}\,, \frac{d}{dt}\mathbf{E} \text{ appartengono ad } H \right\}$$

$$\hat{\mathfrak{D}} = \{u : \ u = (\mathbf{E}\,,\mathbf{H})\,, \mathbf{E} \in L^2(I\,,W_0) \cap L^{2,1}(I\,;L^2(\Omega\,;R^3)),$$
$$H \in L^2(I\,,W) \cap L^{2,1}(I\,;L^2(\Omega\,;R^3))\}\,.$$

È il caso di ricordare che lo spazio $W_0$ risulta una opportuna generalizzazione dell'insieme dei campi che verificano la condizione al contorno:

$$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{in} \quad \partial\Omega$$

in quanto ogni funzione $\boldsymbol{e} \in W_0$ continua è differenziabile in $\Omega$, per la definizione (I,9) di $W_0$ risulta tale che per ogni $\boldsymbol{h} \in W$

$$\int_\Omega \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n} \, dx = 0$$

da cui si ha localmente: $\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n} = 0$.

(2) Il $\nabla \times \boldsymbol{e}$ esiste in $L^2(\Omega\,;R^3)$ ed è uguale a $\boldsymbol{g}$ se vale l'identità:

$$\int_\Omega \boldsymbol{e} \cdot \nabla \times \boldsymbol{w} \, dx = \int_\Omega \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{w} \, dx$$

per tutti i $\boldsymbol{w} \in C_0^\infty(\Omega\,;R^3)$.

Dando un più preciso significato al problema (I,1), (I,2), (I,4), (I,5) e osservando che per quello che segue è conveniente limitarsi allo studio di condizioni iniziali e al contorno omogenee ($\mathbf{E}^0 = \mathbf{H}^0 = 0$, $\mathbf{E} \times \boldsymbol{n} = 0$) diremo:

DEFINIZIONE 1 (Problema 1). $u = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ *è una soluzione del sistema* (I,3) *con condizioni iniziali e al contorno omogenee e funzione sorgente* $\rho \in L^2(I; L^2(\Omega; R^6))$ *se e solo se* $u \in \hat{\mathfrak{D}}$, *verifica*:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Lambda^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + \rho \qquad \textit{quasi dappertutto in } Q \tag{I,11}$$

*e*

$$u^0 = 0 \qquad \textit{quasi dappertutto in } \Omega . \tag{I,12}$$

Si può osservare che la condizione al contorno (I,5), viene imposta nella ipotesi di appartenenza di $u$ a $\hat{\mathfrak{D}}$, in quanto per la definizione (I,10) si ha che per quasi tutti i $t \in (0, T)$, $\mathbf{E} \in W_0$.

Ora se $(\mathbf{E}', \mathbf{H}')$ rappresentano un nuovo campo, moltiplichiamo scalarmente la equazione (I,1) per $\mathbf{E}'(x, T-t)$, e l'equazione (I,2) per $-\mathbf{H}'(x, T-t)$, quindi integrando in Q abbiamo:

$$\int_Q \{\dot{\tilde{\mathbf{D}}}(t) \cdot \mathbf{E}'(T-t) - \nabla \times \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{E}'(T-t) + \mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{E}'(T-t)\}\, dx\, dt = 0$$

$$\int_Q \{\dot{\tilde{\mathbf{B}}}(t) \cdot \mathbf{H}'(T-t) + \nabla \times \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{H}'(T-t) - \mathbf{I}(t) \cdot \mathbf{H}'(T-t)\}\, dx\, dt = 0 .$$

Supponiamo ora che $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ sia soluzione del Problema 1, mentre $(\mathbf{E}', \mathbf{H}') \in \hat{\mathfrak{D}}$ e $\mathbf{E}'(x, 0) = \mathbf{H}'(x, 0) = 0$ quasi dappertutto in $\Omega$. Applicando il teorema della divergenza e dopo una integrazione per parti nella variabile $t$, si ottiene:

$$\int_Q \{\tilde{\mathbf{D}}(t) \cdot \dot{\mathbf{E}}'(T-t) - \mathbf{H}(t) \cdot \nabla \times \mathbf{E}'(T-t) - \mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{E}'(T-t)\}\, dx\, dt = 0 \tag{I,13}$$

$$-\int_Q \{\tilde{\mathbf{B}}(t) \cdot \dot{\mathbf{H}}'(T-t) + \mathbf{E}(t) \cdot \nabla \times \mathbf{H}'(T-t) + \mathbf{I}(t) \cdot \mathbf{H}'(T-t)\}\, dx\, dt = 0 . \tag{I,14}$$

Se $v = (\mathbf{E}', \mathbf{H}')$, indichiamo con $\underset{\sim}{v} = (\mathbf{E}', -\mathbf{H}')$, mentre $v^t = (\mathbf{E}'(T-t), \mathbf{H}'(T-t))$ ricordando che $\tilde{F} = (\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}})$, la somma delle due equazioni integrali (I,13), (I,14) può più concisamente essere espressa:

$$\int_0^T \left\{\left(\tilde{F}(u^t), \frac{\partial v^T}{\partial t}\right)_\Omega - \left(u, \Lambda^i \frac{\partial v^T}{\partial x^i}\right)_\Omega + (\rho, \underset{\sim}{v}^T)_\Omega\right\} dt = 0 . \tag{I,15}$$

Limitiamoci per ora a studiare il caso non ereditario. Quindi il sistema (3,11) della Nota [1] si esprime:

$$\partial_u \partial_u \tilde{\psi} \frac{\partial u}{\partial t} - \Lambda^i \frac{\partial u}{\partial x^i} - \rho = 0 \tag{I,16}$$

dove $\tilde{\psi}$ è la densità di entalpia definita in (F; 1,5).

Osserviamo che poiché $\tilde{\tilde{F}}(0) = 0$, si ha:

$$\tilde{\tilde{F}}(u) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \tilde{\tilde{F}}(\tau u) \, d\tau = \int_0^1 \partial_{\tau u} \tilde{\tilde{F}}(\tau u) \, d\tau \, u .$$

Poniamo ora

$$A^u(x, t) = \int_0^1 \partial_{\tau u} \tilde{\tilde{F}}(\tau u) \, d\tau = \int_0^1 \partial_{\tau u} \partial_{\tau u} \tilde{\psi}(\tau u) \, d\tau$$

che risulta una matrice simmetrica e per (F ; 3,4) definita positiva.

Pertanto

$$F(u) = A^u(x, t) \, u(x, t). \tag{I,17}$$

Sia ora R la trasformazione lineare da $R^6 \to R^6$ per cui:

$$Rv = \underset{\sim}{v} \tag{I,18}$$

identificabile con la matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

R quindi è simmetrica ed ortogonale, infatti $RR = I$, inoltre

$$v = R\underset{\sim}{v}$$

Pertanto da (I,15) ricordando (I,17) abbiamo:

$$\int_0^T \left\{ \left( A^u u , R \frac{\partial v^T}{\partial t} \right)_\Omega - \left( u , \Lambda^i R \frac{\partial v^T}{\partial x^i} \right)_\Omega + (\rho , \underset{\sim}{v}^T)_\Omega \right\} dt = 0 .$$

Ora poiché $R \Lambda^i R = - \Lambda^i$ e ponendo $\underset{\sim}{A}^u = R A^u R$, si ha:

$$\int_0^T \left\{ \left( \underset{\sim}{u} , \underset{\sim}{A}^u \frac{\partial v^T}{\partial t} \right)_\Omega + \left( \underset{\sim}{u} , \Lambda^i \frac{\partial v^T}{\partial x^i} \right)_\Omega + (\rho , \underset{\sim}{v}^T)_\Omega \right\} dt = 0 . \tag{I,19}$$

Infine per la proprietà del prodotto di convoluzione:

$$\int_0^T \left\{ \left( \underset{\sim}{u}^T , \underset{\sim}{A}^u (T - t) \frac{\partial v}{\partial t} \right)_\Omega - \left( \underset{\sim}{u}^T , \Lambda^i \frac{\partial v}{\partial x^i} \right)_\Omega - (\rho , \underset{\sim}{v}^T)_\Omega \right\} dt = 0 . \tag{I,20}$$

DEFINIZIONE 2 (Problema Duale). *Chiameremo problema duale del* Problema I *non ereditario la determinazione di una funzione* $v = (\mathbf{E}', \mathbf{H}')$ *tale che per ogni funzione sorgente* $\rho' = (-\mathrm{J}', \mathrm{I}')\ \mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{R}^6))$:

a) $\underset{\sim}{\mathrm{A}}^u(x, \mathrm{T}-t)\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \Lambda^i \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x^i} - \rho'(x,t) = 0$

b) $v(x, 0) = 0$ *quasi dappertutto in* $\Omega$.

TEOREMA 2 (Dualità). *Se* $u, v \in \hat{\mathfrak{D}}$ *sono rispettivamente soluzione del* Problema I *non ereditario e del* Problema Duale *allora deve sussistere la relazione*:

$$\int_0^{\mathrm{T}} (\underset{\sim}{v}^{\mathrm{T}}(t), \rho(t))_\Omega \, dt = \int_0^{\mathrm{T}} (\underset{\sim}{u}^{\mathrm{T}}(t), \rho'(t))_\Omega \, dt . \tag{I,21}$$

In termini di campi elettrico e magnetico la condizione di dualità (I,26) assume la forma

$$\int_0^{\mathrm{T}}\int_\Omega \{\mathbf{E}(\mathrm{T}-t)\cdot\mathbf{J}'(t) - \mathbf{H}(\mathrm{T}-t)\cdot\mathbf{I}'(t)\}\, dx\, dt = \tag{I,22}$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}}\int_\Omega \{\mathbf{E}'(\mathrm{T}-t)\cdot\mathbf{J}(t) - \mathbf{H}'(\mathrm{T}-t)\cdot\mathbf{I}(t)\}\, dx\, dt .$$

Passando ora al caso ereditario osserviamo che $\tilde{\tilde{\mathrm{F}}}(u^t)$ si esprime in conseguenza di (F ; 3,9):

$$\tilde{\tilde{\mathrm{F}}}(u^t) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau}\tilde{\tilde{\mathrm{F}}}(\tau u^t)\, d\tau = \int_0^1 \left\{\partial_{\tau u^t}\tilde{\tilde{\mathrm{F}}}(\tau u^t)\, u^t(0) + \delta_\tau \tilde{\tilde{\mathrm{F}}}(\tau u^t \mid u^t)\right\} d\tau .$$

Utilizzando quindi il procedimento che consente di pervenire alla espressione (F ; 3,10) e ricordando che $u^0 = 0$, si ha:

$$\tilde{\tilde{\mathrm{F}}}(u^t) = \int_0^1 \partial_{\tau u^t}\tilde{\tilde{\mathrm{F}}}(\tau u^t)\, d\tau\, u^t(0) + \int_0^t\int_0^1 \mathrm{B}(\tau u^t; s)\, u^t(s)\, d\tau\, ds .$$

Se indichiamo ancora con:

$$\mathrm{A}^u(x, t) = \int_0^1 \partial_{\tau u^t}\tilde{\tilde{\mathrm{F}}}(\tau u^t)\, d\tau = \int_0^1 \delta_{\tau u^t}\,\partial_{\tau u^t}\,\tilde{\psi}(\tau u^t)\, d\tau \tag{I,23}$$

o con

$$\mathrm{C}^u(x, t, t-s) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}(\tau u^t; t-s)\, d\tau & \text{per } t \geq s \\ 0 & \text{per } t < s \end{cases}$$

si ha che

$$(\mathrm{I},24) \qquad \tilde{\mathrm{F}}(u^t(x)) = \mathrm{A}^u(x\,,t)\,u(x\,,t) + \int_0^t \mathrm{C}^u(x\,,t\,,t-s)\,u(x\,,s)\,\mathrm{d}s$$

dove, come risulta da (I,23), $\mathrm{A}^u(x\,,t)$ è ancora una matrice simmetrica e definita positiva. Pertanto da (I,15) ricordando (I,24) abbiamo:

$$(\mathrm{I},25) \qquad \int_0^{\mathrm{T}} \Big\{ \mathrm{A}^u u\,,\ \mathrm{R}\,\partial v^{\mathrm{T}}/\partial t)_\Omega + \Big( \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{C}^u(t\,,t-s)\,u(s)\,\mathrm{d}s\,,\ \mathrm{R}\,\partial v^{\mathrm{T}}/\partial t\Big)_\Omega -$$

$$-(u\,,\Lambda^i\,\mathrm{R}\,\partial v^{\mathrm{T}}/\partial x^i)_\Omega + (\rho\,,\underset{\sim}{v}^{\mathrm{T}})_\Omega \Big\}\,\mathrm{d}t = 0$$

esaminiamo ora in particolare, il termine

$$\int_0^{\mathrm{T}} \Big( \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{C}^u(t\,,t-s)\,u(s)\,\mathrm{d}s\,,\ \mathrm{R}\,\partial v^{\mathrm{T}}/\partial t\Big)_\Omega\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} (\underset{\sim}{u}(s)\,,\ \mathrm{RC}^{u+}(t\,,t-s)\,\mathrm{R}\,\partial v^{\mathrm{T}}/\partial^t)_\Omega\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$

dove $\mathrm{C}^{u+}$ è il trasporto di $\mathrm{C}^u$. Quindi ponendo $\underset{\sim}{\mathrm{C}}^u = \mathrm{RC}^{u+}\,\mathrm{R}$, cambiando i simboli delle variabili di integrazione e operando la trasformazione $t - r = s$:

$$(\mathrm{I},26) \qquad \int_0^{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} (\underset{\sim}{u}(s)\,,\underset{\sim}{\mathrm{C}}^u(t\,,t-s)\,\partial v^{\mathrm{T}}/\partial t)_\Omega\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}} \Big(\underset{\sim}{u}(t)\,,\int_0^{\mathrm{T}} \underset{\sim}{\mathrm{C}}^u(r\,,r-t)\,\partial v^{\mathrm{T}}(r)/\partial r\,\mathrm{d}r\Big)_\Omega\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}} \Big(\underset{\sim}{u}(t)\,,\int_0^{\mathrm{T}-t} \underset{\sim}{\mathrm{C}}^u(t-s\,,s)\,\frac{\partial v^{\mathrm{T}-t}(s)}{\partial s}\,\mathrm{d}s\Big)_\Omega\,\mathrm{d}t\,.$$

Indicando ancora con $\underset{\sim}{\mathrm{A}}^u = \mathrm{RA}^u\,\mathrm{R}$ e ricordando (I,25) e (I,26) si ha: per le proprietà del prodotto di convoluzione:

$$(\mathrm{I},27) \qquad \int_0^{\mathrm{T}} \Big\{ (\underset{\sim}{u}^{\mathrm{T}}, \underset{\sim}{\mathrm{A}}^u(\mathrm{T}-t)\,\partial v/\partial t)_\Omega + \Big(\underset{\sim}{u}^{\mathrm{T}}, \int_0^t \underset{\sim}{\mathrm{C}}^u(\mathrm{T}-t-s\,,s)\,\partial v^t(s)/\partial s\,\mathrm{d}s\Big) -$$

$$-(\underset{\sim}{u}^{\mathrm{T}}, \Lambda^i \partial v/\partial x^i)_\Omega - (\rho\,,\underset{\sim}{v}^{\mathrm{T}})_\Omega \Big\}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

La validità del Teorema 2 quindi permane anche nel caso ereditario a patto di sostituire nella Definizione 2 del problema duale alla condizione a) la seguente:

$$\text{a}^{*}) \qquad \underset{\sim}{A}^{u}(x\,,\mathrm{T}-t)\,\partial v(x\,,t)/\partial t+\int_{0}^{t}\underset{\sim}{C}^{u}(x\,,\mathrm{T}-t-s\,,s)\,\partial v^{t}(x\,,s)\,\mathrm{d}s-$$

$$-\Lambda^{i}\,\partial v(x\,,t)/\partial x^{i}-\rho'(x\,,t)=0\,.$$

La condizione di dualità del Teorema 2 può essere utilizzata per stabilire teoremi di unicità per sistemi del tipo (I,11) quando sono noti teoremi di esistenza per il problema lineare espresso dalle condizioni a), b). Poiché l'esistenza del problema duale implica l'unicità del Problema 1. Tale procedimento è stato anche utilizzato per un problema relativo alle equazioni di Maxwell [6].

Viceversa la condizione (I,26) consente di costruire esempi per dimostrare la non esistenza di una soluzione del Problema Duale nel caso in cui non esista l'unicità per il Problema 1. Tale tecnica nel caso di equazioni lineari è stata usata per costruire *controesempi* di tipo De Giorgi [5], [6].

Una applicazione interessante sul teorema di dualità consiste nello studio del campo elettrico, emesso da una antenna posta in prossimità di una superficie perfettamente conduttrice.

Consideriamo infatti una antenna distribuita su una regione K della superficie $\partial\Omega$, sia $f(x)=0$ la sua equazione. La corrente $\mathbf{J}(x\,,t)$ è pertanto esprimibile nel modo seguente

$$(\text{I},28) \qquad \mathbf{J}(x\,,t)=\mathbf{A}(x\,,t)\,\delta(f(x))$$

dove $\mathbf{A}(x\,,t)$ è un vettore tangente in $x$ alla superficie $\partial\Omega$, definita per $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{K}$, mentre $\delta(\sigma)$ è la funzione di Dirac.

Sia $\mathbf{E}(x\,,t)$ il campo elettrico generato da tale antenna sotto le ipotesi di dati iniziali e al contorno omogenei, il che vuol dire che il campo elettrico inizialmente è nullo e che la frontiera del dominio $\Omega$ è costituita da un conduttore perfetto per cui:

$$(\text{I},29) \qquad \mathbf{E}\times\boldsymbol{n}=0 \qquad \text{su}\quad \partial\Omega\,.$$

Consideriamo quindi il problema duale espresso dalla Definizione 2 nella ipotesi che $\mathbf{I}'=0$, mentre $\mathbf{J}'(x\,,t)$ risulta una arbitraria funzione continua. Ricordiamo che per il problema duale i dati iniziali e al contorno sono ancora omogenei.

Poiché per tali problemi sono valide le considerazioni del Teorema 1, la relazione (I,22), nel caso specifico, si riduce:

$$(\text{I},30) \qquad \int_{0}^{\mathrm{T}}\int_{\Omega}\mathbf{E}(x\,,\mathrm{T}-t)\cdot\mathbf{J}'(x\,,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{0}^{\mathrm{T}}\int_{\Omega}\mathbf{E}'(x\,,\mathrm{T}-t)\cdot\mathbf{A}(x\,,t)\,\delta(f(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Come già detto per il problema duale vale la condizione $\mathbf{E}' \times \boldsymbol{n} = 0$ su $\partial\Omega$ pertanto, ricordando che $\mathbf{A}(x, t)$ è tangente a $\partial\Omega$, mentre $\mathbf{E}'$ deve essere normale:

$$(\mathrm{I},31) \qquad \int_0^{\mathrm{T}} \int_{\Omega} \mathbf{E}'(x, \mathrm{T} - t) \cdot \mathbf{J}(x, t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} \int_{\partial\Omega \cap \mathrm{K}} \mathbf{E}'(x, \mathrm{T} - t) \cdot \mathbf{A}(x, t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s = 0$$

si estende così, dato che $\mathbf{J}(x, t)$ è una arbitraria funzione continua, il risultato di D. Graffi [2], valido per problemi lineari:

OSSERVAZIONE. *Il campo elettrico generato da una antenna distribuita su una superficie di un conduttore perfetto è identicamente nullo.*

## BIBLIOGRAFIA

[1] M. FABRIZIO, *Convessità dei potenziali termodinamici nell'elettromagnetismo ereditario*, « Atti Acc. Naz. dei Lincei », *55* (3–4), 241–249 (1973).
[2] D. GRAFFI, « Nuovo Cimento », *9* (8), 1–8 (1932).
[3] A. E. HURD, « Pacific. Journ. of Math. », *29*, 555–560 (1969).
[4] M. FABRIZIO, « Atti Acc. Naz. dei Lincei », *49*, 102–109 (1970).
[5] E. DE GIORGI, « Rend. Mat. », *14*, 382–387 (1955).
[6] J. LERAY, « Math. Annalen », *162*, 228–236 (1966).