
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FROIM MARCUS

Sur les surfaces réglées $\mathcal{D}$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 55 (1973), n.5, p. 377–387.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_377_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Sur les surfaces réglées* ②. Nota di FROIM MARCUS, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Le superficie di cui al titolo sono quelle rigate per cui i due coefficienti β e γ di Fubini si riducono a costanti. Esse vengono qui studiate e distribuite in quattro classi $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_{2a}, \mathfrak{D}_{2b}, \mathfrak{D}_3$, di cui si determinano anche le equazioni in forma finita.

INTRODUCTION

1. Soit S une surface réglée engendrée par le point $x = x(u, v)$ et u, v les paramètres asymptotiques. Supposons que les asymptotiques $v = \text{const.}$ soient les génératrices rectilignes de la surface. De la théorie générale des surfaces [1] il s'ensuit que $\beta = p_{11} = \theta_u = 0$ et à une homographie près, S est déterminée par le système complètement intégrable:

$$(1.1) \quad x_{uu} = 0; \quad x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x.$$

En multipliant les coordonnées x par un facteur de proportionnalité, nous pouvons rendre $\theta = \text{const.}$ Alors les conditions d'intégrabilité du système (1.1) sont:

$$(1.2) \quad \gamma_{uu} + 2p_{22u} = \frac{\partial^2 p_{22}}{\partial u^2} = 0,$$

et en intégrant on obtient:

$$(1.3) \quad \gamma = A + Bu + Cu^2; \quad p_{22} = j - Cu,$$

où A, B, C , et j sont des fonctions de la variable v seulement.

D'autre part, on sait aussi qu'on peut obtenir l'équation d'une surface réglée en se donnant une correspondance entre deux courbes (directrices) C_1, C_2 , et en joignant par une droite chaque couple de points correspondants.

Soient $y = y(v)$ et $z = z(v)$ deux asymptotiques de la surface S et $u = \text{const.}$ les asymptotiques non rectilignes de S . On peut alors supposer que S est aussi engendrée par le point

$$(1.4) \quad x = y + uz.$$

En observant que les points y et z dépendent seulement de la variable v et sont linéairement indépendantes, on obtient de (1.1) et (1.3) le système:

$$(1.5) \quad y'' - jy - Az = 0, \quad z'' - (B + j)z + Cy = 0.$$

Les surfaces réglées dont les asymptotiques courbes appartiennent à un complexe linéaire ont fait l'objet de plusieurs études. Dans [1] Chapitre IV on trouve une étude systématique et profonde des surfaces réglées.

En utilisant la condition afin qu'une des deux familles des asymptotiques d'une surface non réglée appartient à un complexe linéaire, c'est-à-dire la condition:

$$(1.6) \quad \frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \partial v} = \beta \gamma, \quad \left(\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} = \beta \gamma \right);$$

on démontre aisément dans [1], page 113 les résultats suivants:

Les surfaces réglées dont les asymptotiques non rectilignes appartiennent à un complexe linéaire sont toutes les surfaces réglées qui appartiennent à une congruence linéaire, à directrices coïncidant ou non qui comprennent les lignes flecnodales de la surface.

(*) Nella seduta del 26 novembre 1973.

Toutes les asymptotiques non rectilignes de ces surfaces réglées sont projectivement identiques.

La réciproque de ce dernier résultat fut démontré par Guido Fubini dans une Note de 1941 [2] où il démontre le théorème suivant:

Si toutes les asymptotiques non rectilignes d'une surface réglée sont projectivement identiques elles appartiennent à un complexe linéaire et toutes ces surfaces doivent satisfaire la condition:

$$(1.7) \quad \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} = V(v) \quad \left(\frac{\partial \log \beta}{\partial u} = U(u) \right),$$

$V(U)$ fonction arbitraire de la variable v (de la variable u).

Supposons que S est une telle surface réglée. En tenant compte de l'expression (1.3) de γ , et en observant que A, B, C , sont fonctions de v , la condition (1.7) donne:

$$(1.8) \quad \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}.$$

Réciproquement supposons que les coefficients A, B, C de $\gamma = A + Bu + Cu^2$ qui déterminent une surface réglée quelconque satisfont (1.8). Par intégration on obtient:

$$(1.9) \quad A = k_1 V \quad ; \quad B = k_2 V \quad ; \quad C = k_3 V,$$

avec V fonction arbitraire de la variable v et k_1, k_2, k_3 des constantes arbitraires. Par conséquent

$$(1.3') \quad \gamma = (k_1 + k_2 u + k_3 u^2) V,$$

et la condition (1.7) de Fubini est remplie. En observant que d'après Fubini-Čech [1] page 223, la condition (1.8) caractérise les surfaces réglées qui appartiennent à une congruence linéaire, il résulte que si les asymptotiques non rectilignes d'une surface réglée sont projectivement identiques la surface appartient à une congruence linéaire.

2. Parmi les surfaces réglées dont les asymptotiques non rectilignes appartiennent à un complexe linéaire, il y a une classe que nous appelons *surfaces réglées* $\mathfrak{D}$, caractérisées analytiquement par la propriété qu'on peut réduire les coefficients $\gamma(\beta)$ à une constante. Elles ont été rencontrées par G. Fubini [3] dans un de ses Mémoires fondamentaux sur la géométrie projective différentielle.

Fubini montre entre autres, que contrairement au cas des surfaces non réglées qui peuvent admettre tout au plus un groupe G_2 de déformations projectives en elles-mêmes, les surfaces réglées telles qu'on peut réduire $\gamma(\beta)$ à une constante, possèdent un groupe continu G_3 de déformations projectives en elles-mêmes. Il observe qu'il serait peut-être intéressant d'étudier plus en détail ces surfaces, ce que nous essayons de faire dans la présente Note. Ces mêmes surfaces ont été rencontrées par nous récemment dans notre Note [4] dont il sera question un peu plus loin.

Nous classifions les surfaces réglées $\mathfrak{D}$ en trois classes en relation avec la fonction $p_{22} = j$.

Soit donc S une surface réglée $\mathfrak{D}$. Supposons que nous avons réduit $\gamma(\beta)$ à une constante $k \neq 0$. De (1.3) il s'ensuit

$$(2.1) \quad \gamma = A \quad ; \quad p_{22} = j(v) \quad (B = C = 0),$$

et de (1.1) on obtient les équations ponctuelles et tangentielles des asymptotiques $u = \text{const.}$ de la surface $\mathfrak{D}$, qui sont:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x^{(4)} - 2p_{22}x'' - 2p'_{22}x' + (p_{22}^2 - p_{22}'')x &= 0, \\ \zeta^{(4)} - 2p_{22}\zeta'' - 2p'_{22}\zeta' + (p_{22}^2 - p_{22}'')\zeta &= 0, \end{aligned}$$

les dérivées sont par rapport à la variable v .

Nous avons donc à considérer les trois cas suivants:

Premier cas.

$$(2.3) \quad p_{22} = j = 0.$$

L'équation ponctuelle (2.2) devient

$$(2.4) \quad x^{(4)} = 0,$$

et ça veut dire que les asymptotiques non rectilignes de la surface sont des cubiques gauches. De (1.5) on tire

$$(2.5) \quad y'' = kz \quad ; \quad z'' = 0.$$

Donc la directrice z est rectiligne. Par intégration, nous obtenons les coordonnées des points z et y qui sont

$$(2.6) \quad z(0, 0, 1, v) \quad ; \quad y(1, v, kv^2/2, kv^3/6).$$

Les coordonnées du point x qui décrit la surface $\mathfrak{D}$ correspondante et que nous notons avec $\mathfrak{D}_1$ sont:

$$(2.7) \quad x^1 = 1 \quad ; \quad x^2 = v \quad ; \quad x^3 = kv^2/2 + u \quad ; \quad x^4 = kv^3/6 + uv.$$

L'équation des surfaces $\mathfrak{D}_1$ est:

$$(2.8) \quad k(x^2)^3 + 3x^4 - 3x^2x^3 = 0.$$

et en coordonnées non-homogènes

$$(2.9) \quad z = xy - kx^3/3.$$

Mais ces surfaces sont les surfaces cubiques de Cayley (voir [1], pag. 219), donc:

Les surfaces réglées $\mathfrak{D}_1$ sont des surfaces cubiques de Cayley.

Deuxième cas.

$$(2.10) \quad p_{22} = j = \text{const.}$$

Il y a deux possibilités.

a)

$$(2.11) \quad p_{22} = j = \alpha^2, \quad \text{avec } \alpha = \text{const. réelle.}$$

Dans ce cas

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \gamma &= A = k & ; & \quad B = C = 0, \\ x_{uu} &= 0 & ; & \quad x_{vv} = kx_u + \alpha^2 x, \\ y'' - \alpha^2 y &= kz & ; & \quad z'' - \alpha^2 z = 0; \end{aligned}$$

en intégrant nous obtenons

$$(2.13) \quad z(0, 0, e^{\alpha v}, e^{-\alpha v}) : y \left(e^{\alpha v}, e^{-\alpha v}, \frac{kv e^{\alpha v}}{2\alpha}, -\frac{kv}{2\alpha} e^{-\alpha v} \right),$$

et les coordonnées du point générique x sont:

$$(2.14) \quad x^1 = e^{\alpha v} \quad ; \quad x^2 = e^{-\alpha v} \quad ; \quad x^3 = e^{\alpha v} \left(\frac{kv}{2\alpha} + u \right) \quad ; \quad x^4 = e^{-\alpha v} \left(-\frac{kv}{2\alpha} + u \right).$$

L'équation de ces surfaces, que nous notons avec $\mathfrak{D}_{2a}$, en coordonnées homogènes et non-homogènes sont respectivement:

$$(2.15) \quad x^1 = \exp \frac{\alpha^2}{k} (x^2 x^3 - x^1 x^4),$$

et

$$(2.16) \quad z = \frac{y}{x} - \frac{k}{2\alpha^2} \log x.$$

b)

$$(2.17) \quad p_{22} = j = -\alpha^2, \quad \text{avec } \alpha \text{ const. réelle.}$$

Dans ce cas:

$$(2.18) \quad x_{uu} = 0 \quad ; \quad x_{vv} = kx_u - \alpha^2 x,$$

et le système (1.5) devient:

$$(2.19) \quad y'' + \alpha^2 y = kz \quad ; \quad z'' + \alpha^2 z = 0.$$

Les coordonnées des points z et y sont:

$$(2.20) \quad z(0, 0, \sin \alpha v, \cos \alpha v) \quad ; \quad y \left(\sin \alpha v, \cos \alpha v, -\frac{kv}{2\alpha} \cos \alpha v, \frac{kv}{2\alpha} \sin \alpha v \right),$$

et les coordonnées du point x sont:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} x^1 &= \sin \alpha v \quad ; \quad x^2 = \cos \alpha v \quad ; \quad x^3 = -\frac{kv}{2} \cos \alpha v + u \sin \alpha v; \\ x^4 &= \frac{kv}{2\alpha} \sin \alpha v + u \cos \alpha v. \end{aligned}$$

L'équation de ces surfaces, que nous notons avec $\mathfrak{D}_b$, est alors:

$$(2.22) \quad x^1 = x^2 \operatorname{tg} \frac{2\alpha^2}{k} (x^1 x^4 - x^2 x^3),$$

et en coordonnées non-homogènes

$$(2.23) \quad z = xy - \frac{k}{2\alpha^2} (1 + x^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

Troisième cas.

$$(2.24) \quad p_{22} = j(v),$$

avec $j(v)$ fonction arbitraire de la variable v . Le système (1.5) est maintenant:

$$(2.25) \quad y'' - jy = kz \quad ; \quad z'' - jz = 0.$$

Soient $f_1(v)$ et $f_2(v)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $z'' - jz = 0$, et $\delta = \text{const.}$ leur Wronskien. En intégrant l'équation en y , on obtient les coordonnées du point y et nous avons:

$$(2.26) \quad z(0, 0, f_1(v), f_2(v)) : y = \left(f_1, f_2, \frac{k}{\delta} \left(f_2 \int f_1^2 dv - f_1 \int f_1 f_2 dv \right), \frac{k}{\delta} \left(f_2 \int f_1 f_2 dv - f_1 \int f_2^2 dv \right) \right).$$

Les coordonnées du point x de la surface $\mathfrak{D}$ correspondant, que nous notons avec $\mathfrak{D}_3$, sont:

$$(2.27) \quad \begin{aligned} x^1 &= f_1(v) \quad ; \quad x^2 = f_2(v) \quad ; \\ x^3 &= \frac{k}{\delta} \left(f_2 \int f_1^2 dv - f_1 \int f_1 f_2 dv \right) + u f_1(v) \quad ; \\ x^4 &= \frac{k}{\delta} \left(f_2 \int f_1 f_2 dv - f_1 \int f_2^2 dv \right) + u f_2(v), \end{aligned}$$

et l'équation des surfaces $\mathfrak{D}_3$ est:

$$(2.28) \quad \delta (x^2 x^3 - x^1 x^4) = k \left((x^1)^2 \int (x^2)^2 dv - (x^2)^2 \int (x^1)^2 dv \right).$$

Déterminons les surfaces réglées $\mathfrak{D}_3$ telles qu'une des solutions de l'équation $z'' - jz = 0$, soit égale à $j(v)$. Dans ce cas nous obtenons

$$(2.29) \quad v = \int \frac{dz}{\left(\frac{2}{3} z^3 - \frac{c_1}{3} \right)^{1/2}} + C_2,$$

ou

$$(2.30) \quad z = p \left(\frac{v}{\sqrt{6}} - c \right),$$

où p est la fonction de Weierstrass avec les invariants $g_2 = 0, g_3 = c$.

Pour $c_1 = 0$ on obtient

$$(2.31) \quad z_1 = j(v) = 6v^{-2} = f_1(v),$$

à qui correspond la deuxième solution

$$(2.32) \quad z_2 = f_2(v) = v^3/30.$$

Leur Wronskien est égale à 1 et de (2.26) il résulte:

$$(2.33) \quad z\left(0, 0, \frac{6}{v^2}, \frac{v^3}{30}\right) : y\left(\frac{6}{v}, \frac{v^3}{30}, -k; \frac{k}{420}v^5\right).$$

Par conséquent:

$$(2.34) \quad x^1 = \frac{6}{v^2} \quad ; \quad x^2 = \frac{v^3}{30} \quad ; \quad x^3 = -k + \frac{6u}{v^2} \quad ; \quad x^4 = \frac{kv^5}{420} + \frac{v^3}{30}u,$$

et les équations des surfaces $\mathfrak{D}_3$ correspondantes en coordonnées-homogènes et non-homogènes sont respectivement:

$$(2.35) \quad x^4 = x^2(x^1)^{-1}(k + x^3) + \frac{3\sqrt{6}}{35}k(x^1)^{-5/2} \quad ; \quad z = xy - \frac{5}{21}(180)^{2/5}kx^{7/5}.$$

3. SURFACES RÉGLÉES $\mathfrak{D}$ QUI SONT AUSSI DES SURFACES DE PETERSON

D'après A. Voss [5] on nomme surfaces de Peterson les surfaces de l'espace projectif à trois dimensions qui admettent (au moins) un réseau conjugué de lignes coniques. Les surfaces non réglées qui possèdent un réseau R de telles lignes, ont été profondément étudiées par B. Segre [7] qui les a nommées surfaces $\mathfrak{C}$. Les surfaces réglées de Peterson ont été déterminées par O. Mayer [5] et indépendamment par Ya. P. Blank [6].

Il y a quatre types de surfaces réglées de Peterson notamment:

$$(3.1) \quad z = \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha \quad \text{avec } \alpha \neq 0 \quad ; \quad z = \tan^{-1} \frac{y}{x} ;$$

$$z = \frac{y}{x} + x^2 \quad ; \quad z = \frac{y}{x} + \log x.$$

Les lignes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ d'un réseau conjugué sont des *courbes coniques* si l'on a respectivement:

$$(3.2) \quad \bar{K} = 0 \quad ; \quad \bar{H} = 0,$$

$\bar{K}$ et $\bar{H}$, étant les invariants tangentiels du système qui détermine une surface de l'espace projectif P_3 rapportée à un réseau conjugué. Un réseau conjugué est un réseau de *Koenigs* si l'on a en même temps

$$(3.3) \quad K = \bar{K} = 0 \quad ; \quad H = \bar{H} = 0,$$

H et K les *invariants ponctuels* de l'équation de Laplace correspondante. Nous voulons déterminer s'il y a des surfaces $\mathfrak{D}$ qui sont aussi des surfaces réglées de Peterson. Pour cela nous changerons le repère asymptotique avec un repère

conjugué que l'on obtient en posant $u = \bar{u} + \bar{v}$, $v = \bar{u} - \bar{v}$. Le système (I.1) devient:

$$(3.4) \quad x_{uv} + \frac{k}{2} x_u + \frac{k}{2} x_v + p_{22} x = 0, \quad x_{uu} + x_{vv} - kx_u - kx_v - 2p_{22} x = 0,$$

et nous avons

$$(3.5) \quad H = K = \bar{H} = \bar{K} = (k^2 - 4p_{22})/4.$$

Donc une surface réglée $\mathfrak{D}$ est aussi une surface de Peterson si et seulement si

$$(3.6) \quad k^2 - 4p_{22} = 0,$$

et dans ce cas le réseau $(\bar{u}, \bar{v})$ est aussi un *réseau de Koenigs*.

De (3.6) il s'ensuit que $p_{22} = j$, doit être seulement une constante différente de zéro et par conséquent les surfaces $\mathfrak{D}$ correspondantes doivent *appartenir aux surfaces* (2.14) et (2.21). Observons encore que les surfaces $\mathfrak{D}_1$, c'est-à-dire les surfaces cubiques de Cayley (2.7), ne peuvent pas être des surfaces de Peterson. De (3.6) et dans le cas $p_{22} = \alpha^2$ il résulte:

$$(3.7) \quad k = \pm 2\alpha,$$

et nous avons le résultat suivant:

Les surfaces réglées $\mathfrak{D}_2$ avec $\gamma = k = \pm 2\sqrt{p_{22}} = \pm 2\alpha$, ou $\gamma = k = \pm 2i\sqrt{p_{22}} = \pm 2i\alpha$ sont les seules surfaces $\mathfrak{D}$ qui sont aussi des surfaces de Peterson.

En observant que pour les surfaces $\mathfrak{D}$ nous avons $\beta_v = \gamma_u$, nous pouvons dire avec B. Segre [7] que les surfaces précédentes sont les seules surfaces réglées $\mathfrak{C}$.

De (2.16) il résulte que pour $\alpha = \pm 1$, $\gamma = k = -2$, on obtient le quatrième type des surfaces (3.1) trouvées par O. Mayer et Ja. Blank. Du système

$$(3.8) \quad x_{uu} = 0 \quad ; \quad x_{vv} = kx_u + \frac{k^2}{4}x,$$

qui détermine les surfaces $\mathfrak{D}$ de Peterson, il résulte que les deux familles de courbes du système doublement conjugué $du^2 - dv^2 = 0$ sont des courbes W planes, qui sont *projectivement équivalentes entre elles* et satisfont l'équation

$$(3.9) \quad \frac{d^3x}{du^3} - \frac{k}{2} \frac{d^2x}{du^2} - \frac{k^2}{4} \frac{dx}{du} + \frac{k^3}{8}x = 0.$$

Les coordonnées du point générique de ces courbes sont:

$$(3.10) \quad x^1 = e^{\frac{k}{2}u} \quad ; \quad x^2 = ue^{\frac{k}{2}u} \quad ; \quad x^3 = e^{-\frac{k}{2}u}$$

ou

$$(3.11) \quad x = u \quad ; \quad y = e^{-kx}.$$

Les surfaces réglées $\mathfrak{D}$ qui sont aussi des surfaces de Peterson sont aussi, d'après B. Segre [7], les surfaces réglées $\mathfrak{C}$.

4. LES TRANSFORMÉES PAR CONGRUENCES W DES SURFACES $\mathfrak{D}$.

C. Segre [8] a considéré pour la première fois les congruences W à nappes focales surfaces réglées. Leur étude se fait facilement avec la méthode de Fubini [1] (pages 276-278). Selon Bortolotti [9] *une translation projective d'une surface en elle-même est une déformation projective dans laquelle les points de la surface parcourent des distances infinitésimales de longueurs projectives égales c'est-à-dire égales dans la métrique définie par l'élément linéaire projectif de Fubini.*

Selon le même auteur, *la condition nécessaire et suffisante afin qu'une déformation projective d'une surface en elle-même soit une translation projective est que les trajectoires du groupe de déformations soient les lignes pangéodésiques.* Dans notre travail [10] nous avons démontré le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante afin qu'une déformation projective d'une surface en elle-même soit une translation projective, est que les trajectoires du groupe de déformations, appartiennent à une congruence W. Ce qui nous a permis de déterminer toutes les surfaces qui admettent des translations projectives.

Dans [4] nous avons montré que les seules surfaces réglées qui possèdent un groupe G_1 de translations projectives non-banales en elles-mêmes s'obtiennent avec β ou γ réductible à une constante. Le groupe de translations projectives est engendré par la t.i. réductible à: $X = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}$. Les trajectoires du groupe appartenant à une congruence W décrite par leurs tangentes, la seconde nappe focale de la congruence est une transformée par congruence W des surfaces $\mathfrak{D}$.

Soit donc une surface réglée $\mathfrak{D}$ et $\frac{du}{A} - \frac{dv}{B} = 0$ les trajectoires du groupe de t. projectives. D'après la théorie de Fubini [1] chap. V, nous obtenons:

$$(4.1) \quad A = B = e^{-kv} \quad \mu = ke^{-kv} \quad \lambda = -ke^{-kv},$$

et la deuxième nappe focale de la congruence engendrée par les tangentes aux trajectoires est décrite par le point

$$(4.2) \quad \bar{x} = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v) = ke^{-kv} x + 2e^{-kv}(x_u + x_v).$$

Pour déterminer les coefficients du système

$$(4.3) \quad \bar{x}_{uu} = \bar{\theta}_u \bar{x}_u + \bar{\beta} \bar{x}_v + \bar{p}_{11} \bar{x}, \quad \bar{x}_{vv} = \bar{\gamma} \bar{x}_u + \bar{\theta}_v \bar{x}_v + \bar{p}_{22} \bar{x}$$

qui détermine la deuxième nappe focale, Fubini [1] introduit comme on e sait, les trois fonctions N, S, T, définies par:

$$(4.4) \quad N = \lambda\mu + 2A(\mu_u + 2Ap_{11}) - 2B(\mu_v + 2Bp_{22});$$

$$S = \frac{N_u}{2A}; \quad T = -\frac{N_v}{2B}.$$

On obtient ainsi:

$$(4.5) \quad \bar{\theta} = \theta + \log |N|; \quad \bar{\beta} + \beta = -2B \frac{S}{N}; \quad \bar{\gamma} + \gamma = 2A \frac{T}{N},$$

$$p_{11} = \pi_{11} + \frac{\lambda S}{N}; \quad \bar{p}_{22} = \pi_{22} + \frac{\lambda T}{N},$$

où $\pi_{11} = \beta_v + \beta\theta_v + p_{11}$; $\pi_{22} = p_{22} + \gamma_u + \gamma\theta_u$, et N satisfait aussi l'équation en N de Fubini [1]:

$$(4.6) \quad N_{uv} + \frac{A}{B} \beta N_v + \frac{B}{A} \gamma N_u = 0.$$

Dans notre cas ($\beta = p_{11} = 0$, $\theta = \text{const.}$, $\gamma = k$), on a (4.1) et

$$(4.7) \quad \begin{aligned} N &= e^{-2kv} (k^2 - 4p_{22}) & S &= 0 & T &= k (k^2 - 4p_{22}) e^{-kv}, \\ \frac{T}{N} &= ke^{kv} & \bar{\beta} &= 0 & \bar{\gamma} &= k & \bar{\theta}_u &= 0 & \bar{\theta}_v &= -2k, \\ \bar{p}_{11} &= 0 & \bar{p}_{22} &= p_{22} - k^2 & \bar{\pi}_{11} &= 0 & \bar{\pi}_{22} &= p_{22} - k^2. \end{aligned}$$

Donc la deuxième nappe focale est déterminée par le système:

$$(4.8) \quad \bar{x}_{uu} = 0 \quad ; \quad \bar{x}_{vv} = k\bar{x}_v - 2k\bar{x}_v + (p_{22} - k^2) \bar{x},$$

qui est une surface réglée $\mathfrak{D}$, comme la première nappe focale.

D'après Finikoff [11] une congruence de droites qui réalise la correspondance des lignes de Darboux sur les deux nappes de la surface focale est une congruence de Fubini. Si la congruence réalise l'applicabilité projective entre les deux nappes focales, la congruence est une congruence D. Ces congruences se répartissent en cinq familles D_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) (voir aussi F. Marcus [12]). Nous avons donc le résultat suivant:

1. Les transformées par congruences W d'une surface réglée $\mathfrak{D}$ sont aussi une surface réglée $\mathfrak{D}$ de même type et les deux surfaces focales sont projectivement applicables;

2. La congruence correspondante W est une congruence D.

D'après Terracini [13] l'élément linéaire d'une congruence engendrée par les tangentes aux courbes $\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}$ d'une surface que l'on considère la première nappe focale de la congruence est:

$$(4.9) \quad E = \frac{[2W(Bdu + Adv)^2 - N du dv] du dv}{4(B^2 du^2 - A^2 dv^2)},$$

ou

$$(4.10) \quad W = \left(\frac{A_v + B\gamma}{A} \right)_u - \left(\frac{B_u + A\beta}{B} \right)_v.$$

Si la congruence est de type W , l'élément linéaire est

$$(4.9') \quad E = \frac{N du^2 dv^2}{4(B^2 du^2 - A^2 dv^2)}.$$

Considérons la congruence engendrée par les tangentes aux courbes $du + dv = 0$. En notant avec x^* le point générique de la seconde nappe focale, on obtient avec les formules établies au commencement de ce paragraphe:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} A &= e^{kv} = -B & \mu^* &= ke^{kv} = -\lambda^* \\ N^* &= e^{2kv} (k^2 - 4p_{22}) & S^* &= 0 & \frac{T^*}{N^*} &= \frac{k}{e^{kv}}; \\ \beta^* &= 0 & \gamma^* &= k = \gamma & p_{11}^* &= 0; \\ p_{22}^* &= p_{22} - k^2 & \theta_u^* &= 0 & \theta_v^* &= 2k, \end{aligned}$$

et la deuxième nappe focale (x^*) est déterminée par le système

$$(4.8'') \quad x_{uu}^* = 0 \quad , \quad x_{vv}^* = kx_u^* + 2kx_v^* + (p_{22} - k^2)x^*$$

ce qui démontre que les surfaces (x) , $(\bar{x})$ et (x^*) sont projectivement applicables. Nous obtenons ainsi deux suites de surfaces réglées $\mathfrak{D}$ projectivement applicables. Les éléments linéaires des deux congruences sont égaux et nous avons

$$E = E^* = \frac{(k^2 - 4p_{22}) du^2 dv^2}{4(dv^2 - du^2)}.$$

Donc les deux congruences sont d'après Terracini [13] projectivement applicables de deuxième espèce. D'après un résultat de F. Marcus [12] les congruences sont de type D_4 et les courbes $du^2 - dv^2 = 0$ sont des pangeodesiques.

Considérons tout d'abord une surface cubique de Cayley et la congruence engendrée par la droite $(x, \bar{x})$. La surface étant une surface $\mathfrak{D}_1$, nous avons $p_{22} = 0$ et le système (4.8) correspondant est:

$$(4.8') \quad \bar{x}_{uu} = 0 \quad ; \quad \bar{x}_{vv} = k\bar{x}_u - 2k\bar{x}_v - k^2\bar{x}.$$

En intégrant nous obtenons les coordonnées du point $\bar{x}$ qui sont:

$$(4.12) \quad \bar{x}^1 = e^{-kv} \quad ; \quad \bar{x}^2 = ve^{-kv} ;$$

$$\bar{x}^3 = \left(\frac{kv^2}{2} + u \right) e^{-kv} \quad ; \quad \bar{x}^4 = \left(-\frac{5}{6} kv^3 + uv \right) e^{-kv}$$

et les équations de la seconde nappe focale en coordonnées homogènes et non homogènes sont respectivement:

$$(4.13) \quad \bar{x}^1 (\bar{x}^1 \bar{x}^1 - \bar{x}^2 \bar{x}^3) + \frac{4}{3} k (\bar{x}^2)^3 = 0 \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} + \frac{4k}{3} \bar{x}^2.$$

Pour $4k = 3$ nous retrouvons le troisième type des surfaces réglées (3.1) trouvées par O. Mayer et Ja. P. Blank.

Supposons que la première nappe focale de la congruence est une surface $\mathfrak{D}_{2a}$ réglée c'est-à-dire $p_{22} = \alpha^2$. De (4.1), (4.7) et (4.3) il résulte

$$(4.14) \quad \bar{x}_{uu} = 0 \quad ; \quad \bar{x}_{vv} = k\bar{x}_u - 2k\bar{x}_v + (\alpha^2 - k^2)\bar{x},$$

et les coordonnées du point $\bar{x}$ sont:

$$(4.15) \quad \bar{x}^1 = e^{(\alpha-k)v} \quad , \quad \bar{x}^2 = e^{-(\alpha+k)v} \quad ; \quad \bar{x}^3 = e^{(\alpha-k)v} (u - k(1 - 2\alpha v)/4\alpha^2) ;$$

$$\bar{x}^4 = e^{-(\alpha+k)v} (-k(1 + 2\alpha v)/4\alpha^2 + u).$$

Les deuxièmes nappes focales de la congruence, dont les premières nappes focales sont les surfaces (2.12), sont déterminées par les équations:

$$(4.16) \quad \frac{\bar{x}^1}{\bar{x}^2} = \exp \frac{2\alpha^2}{k} \left(\frac{\bar{x}^2 \bar{x}^3 - \bar{x}^1 \bar{x}^4}{\bar{x}^1 \bar{x}^3} \right) \quad , \quad \bar{z} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} - \frac{k}{2\alpha^2} \log \bar{x}$$

et pour $2\alpha^2 - k = 0$, on obtient la surface réglée de Peterson de quatrième type, c'est-à-dire la surface $z = \frac{y}{x} + \log x$.

Enfin soit $p_{22} = -\alpha^2$, c'est-à-dire que la première nappe focale de la congruence est une surface $\mathfrak{D}_b$. Nous avons alors le système

$$(4.17) \quad \bar{x}_{uu} = 0 \quad ; \quad \bar{x}_{vv} = k\bar{x}_u - 2k\bar{x}_v - (\alpha^2 + k^2)\bar{x} = 0,$$

d'où en intégrant:

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \bar{x}^1 &= e^{-kv} \cos \alpha v, & \bar{x}^2 &= e^{-kv} \sin \alpha v; \\ \bar{x}^3 &= e^{-kv} \left(\frac{k}{4\alpha^2} \cos \alpha v + \frac{kv}{2\alpha} \sin \alpha v + u \cos \alpha v \right) \\ \bar{x}^4 &= e^{-kv} \left(\frac{k}{4\alpha^2} \sin \alpha v - \frac{kv \cos \alpha v}{2\alpha} + u \sin \alpha v \right), \end{aligned}$$

et en coordonnées homogènes et non-homogènes les équations des deuxièmes nappes focales des congruences sont donc

$$(4.19) \quad \frac{x^2}{x^1} = \operatorname{tg} \left(\frac{2\alpha^2}{k} \frac{x^2 x^3 - x^1 x^4}{x^1 \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \right), \quad z = \frac{y}{x} + \frac{k}{2\alpha^2} \left(\frac{1+x^2}{x} \right) \operatorname{arctg} x.$$

Observons encore que les asymptotiques non rectilignes des surfaces réglées $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_{2a}, \mathfrak{D}_{2b}$, sont des courbes anharmoniques, ou courbes W, et par conséquent elles se trouvent aussi sur des quadriques (voir G. Bol [15]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. FUBINI e E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale* (Zanichelli, Bologna, 1926-1927).
- [2] G. FUBINI, *On the asymptotic lines of a ruled surface*, « Bull. Amer. Math. Society », 47, 448-451 (1941) ou *Opere Scelte*, vol. III.
- [3] G. FUBINI, *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », 43, 1-46 (1919).
- [4] F. MARCUS, *Surfaces réglées à groupes continus de transformations projectives similaires en elles-mêmes*, « Rendic. Acc. Naz. Lincei » (VIII), 51 (6), 492-469 (1971).
- [5] O. MAYER, *Sur les surfaces réglées de Peterson*, « Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. Roumanie », 2 (50) 61-74 (1958).
- [6] JA. P. BLANK, *Conical Nets*, « Mat. Otd. Fiz. Mat. Fak. i. Har'kov Mat. Obsc. » (4) 23, (1952), 113-141 (1954).
- [7] B. SEGRE, *Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili, etc.*, « Memorie R. Acc. d'Italia », 2, 3 (1931).
- [8] C. SEGRE, *Le congruenze Rettilinee W aderenti a due superficie rigate*, « Atti R. Acc. Scienze Torino », 49, 54, 335-346 (1913-14), e *Opere*, vol. II, 9-19.
- [9] EN. BORTOLOTTI, *Sulle proprietà proiettive delle deformazioni infinitesime di una superficie in sé*, « Rendiconti Palermo », 97-111 (1930).
- [10] F. MARCUS, *Cîteva contribuții la proprietățile proiective ale deformărilor infinit mici ale unei suprafețe în ea însăși*, « Stud. și cercetări șt. Matematica Iași », 12 (1), 69-94 (1961).
- [11] S. FINIKOFF, *Theorie der Kongruenzen*, Akademie Verlag, Berlin, 1959.
- [12] F. MARCUS, *Sur les congruences de droites D*, « Bull. Sc. Math. », 2 ser., 85, 118-126 (1961).
- [13] A. TERRACINI, *Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale delle congruenze di rette*, « Atti del R. Ist. Veneto di Sc., etc. », 94, 75-86 (1934-1935).
- [14] E. Y. WILCZYNSKI, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Chelsea Publishing Co., New York.
- [15] G. BOL, *Projektive Differential Geometrie*, 1 Teil, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1950.