Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gianfranco Bottaro

Problema di Dirichlet e misto per equazioni ellittiche variazionali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.5, p. 334–340.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_334_0>

Analisi matematica. — *Problema di Dirichlet e misto per equazioni ellittiche variazionali* (*). Nota (**) di GIANFRANCO BOTTARO, presentata dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — I prove existence and unicity of the solution of Dirichlet's problem and a mixed problem for linear second order elliptic differential equations in divergence form, with discontinuous coefficients in an unbounded domain.

INTRODUZIONE

In precedenti lavori ([1] e [2]) sono stati studiati il problema di Dirichlet e il problema misto per le equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui e di tipo variazionale su insiemi non limitati e sono stati provati esistenza ed unicità della soluzione di tale problema facendo opportune ipotesi sui coefficienti che consentono una maggiorazione a priori della soluzione.

In questa Nota vogliamo illustrare come si possa riottenere esistenza e unicità facendo ipotesi diverse, che, sebbene meno esplicite di quelle esposte in [1] e [2], permettono di risolvere alcune equazioni che non rientrano in quelle ivi studiate. Daremo anche un esempio di ciò (n. 4).

Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$, consideriamo le seguenti funzioni a valori reali definite su Ω

$$a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega) \qquad (i, j = 1 \cdots n) \tag{0.1}$$

soddisfacenti a

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq \nu\, |\xi|^2 \qquad \text{ove} \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \nu > 0, \qquad \text{per q.o.} \quad x \in \Omega$$

$$b_i, d_i \in L^n(\Omega) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

$$c \in L^{n/2}(\Omega) + L^{\infty}(\Omega), f \in L^2(\Omega) + L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega), f_i \in L^2(\Omega) \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Studieremo il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} a(u, v) = \langle F, v \rangle & \text{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{0.2}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del «Centro di Studio per la Matematica e Fisica Teorica» del C.N.R. presso l'Università di Genova.

(**) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1973.

ove a è una forma bilineare continua su $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ così definita:

$$a(u,v)=\int_\Omega\left[\sum_{ij=1}^n(a_{ij}u_{x_i}+d_j u)v_{x_j}+\left(\sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}+cu\right)v\right]dx \tag{0.3}$$

$$\langle F,v\rangle=\int_\Omega fv\,dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega f_i v_{x_i}\,dx \tag{0.4}$$

e $H_0^1(\Omega)$ indica come usualmente lo spazio di Sobolev ottenuto completando $C_0^1(\Omega)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\}^{1/2} \tag{0.5}$$

ove

$$\|u_x\|_{L^2(\Omega)}=\left\{\sum_{i=1}^n\|u_{x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}^{1/2}. \tag{0.6}$$

Volendo discutere anche il problema al contorno misto supporremo altresì che Ω abbia frontiera lipschitziana uniformemente regolare ([3]) e che goda di proprietà di cono. Sia Γ_0 un sottoinsieme chiuso di $\partial\Omega$ e sia $\Gamma_1=\partial\Omega\setminus\Gamma_0$. Definiamo $H^1(\Omega)$ come completamento del sottospazio delle funzioni di $C^1(\overline{\Omega})$ per cui il secondo membro di (0.5) riesce finito rispetto alla stessa norma (0.5) e consideriamo il sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$

$$V=\{u\in H^1(\Omega):\ u=0\quad \text{su } \Gamma_0 \text{ nel senso di } H^1(\Omega)\}.$$

Siano

$$g\in L^{n-1}(\Gamma_1)+L^\infty(\Gamma_1)\quad,\quad h\in L^{\frac{2n-2}{n}}(\Gamma_1)+L^2(\Gamma_1). \tag{0.7}$$

Prenderemo in considerazione il seguente problema misto

$$\begin{cases} b(u,v)=\langle G,v\rangle & \text{per ogni } v\in V\\ u\in V\end{cases} \tag{0.8}$$

ove b è una forma bilineare continua su $V\times V$

$$b(u,v)=\int_\Omega\left[\sum_{ij=1}^n(a_{ij}u_{x_i}+d_j u)v_{x_j}+\left(\sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}+cu\right)v\right]dx+\int_{\Gamma_1}guv\,d\sigma\ ^{(1)}. \tag{0.9}$$

$$\langle G,v\rangle=\int_\Omega fv\,dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega f_i v_{x_i}\,dx+\int_{\Gamma_1}hv\,d\sigma. \tag{0.10}$$

(1) Naturalmente nell'ultimo integrale u e v rappresentano le tracce di u e v su Γ_1.

Useremo infine le seguenti notazioni

$$(0.11)\quad \Omega(i,k)=\{x\in\Omega:|(b_i+d_i)(x)|\geq k\}\quad,\quad m_i(k)=\left\{\int_{\Omega(i,k)}|b_i+d_i|^n\,dx\right\}^{1/n}$$

$$i=1\cdots n\quad,\quad m(k)=\left\{\sum_{i=1}^n m_i(k)^2\right\}^{1/2}\quad,\quad c^t=\max(c,t)\quad,\quad c_t=\max(t-c,0)$$

per cui $c=c^t-c_t$, $p(t)=\|c_t\|_{L^{n/2}(\Omega)}$ (essendo k e t numeri reali non negativi).

1. Coercività nel problema di Dirichlet

Prima di formulare l'ulteriore ipotesi sui coefficienti d'ordine minore che ci permetterà di provare la coercività della forma bilineare (0.3), enunciamo il seguente risultato di Sobolev ([4], pag. 488).

Lemma 1.1. *Sia* $u\in H_0^1(\Omega)$, *risulta allora*

$$(1.1)\qquad \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}\leq S\,\|u_x\|_{L^2(\Omega)}$$

ove

$$(1.2)\qquad \frac{1}{2^*}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\quad,\quad S=\frac{2(n+1)}{n(n-2)\sqrt{\pi}}\left(\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{1/n}.$$

Teorema 1.1. *Se oltre alle ipotesi ammesse nell'introduzione esistono* $k\geq 0$, $t>0$ *tali che*

$$(1.3)\qquad \nu-Sm(k)-S^2p(t)-\frac{n^2k^2}{4t}>0$$

la forma (0.3) *è coerciva su* $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Tenendo conto del Lemma 1.1 e della disuguaglianza di Hölder, posto $\alpha=\nu-Sm(k)-S^2p(t)-\dfrac{n^2k^2}{4t}$, si ha

$$\int_\Omega[\nu|u_x|^2+c^tu^2]\,dx\leq a(u,u)-\sum_{i=1}^n\int_\Omega[(b_i+d_i)uu_{x_i}]\,dx+$$

$$+\int_\Omega c_tu^2\,dx\leq a(u,u)-\sum_{i=1}^n\int_{\Omega(i,k)}(b_i+d_i)uu_{x_i}\,dx+$$

$$-\sum_{i=1}^n\int_{\Omega\setminus\Omega(i,k)}(b_i+d_i)uu_{x_i}\,dx+\int_\Omega c_tu^2\,dx\leq a(u,u)+$$

$$+S\left\{\sum_{i=1}^n\|b_i+d_i\|^2_{L^n(\Omega(i,k))}\right\}^{1/2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+nk\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u_x\|_{L^2(\Omega)}+$$

$$+S^2\|c_t\|_{L^{n/2}(\Omega)}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\leq a(u,u)+Sm(k)\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+$$

$$+nk\left(\frac{2\alpha t+n^2k^2}{4ktn}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{ktn}{2\alpha t+n^2k^2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)+S^2p(t)\|u_x\|_{L^2(\Omega)}$$

da cui poiché $c^t \geq t$

$$\left(\nu - \mathrm{S}m(k) - \mathrm{S}^2 p(t) - \frac{2\,\alpha t + n^2 k^2}{4\,t}\right) \| u_x \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \left(t - \frac{n^2 k^2 t}{2\,\alpha t + n^2 k^2}\right) \| u \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq a(u, u)$$

da cui ponendo $\beta = \min\left(\frac{\alpha}{2}\,,\,\frac{2\,\alpha t^2}{2\,\alpha t + n^2 k^2}\right)$ si ha $a(u\,,\,u) \geq \beta \| u \|^2_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$.

Osservazione 1.1. È chiaro che il teorema precedente assicura la coercività in $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ della forma bilineare

$$a(u\,,\,v) + \lambda(u\,,\,v)_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \tag{1.4}$$

per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esistono un $k \geq 0$ e un $t > 0$ verificanti la condizione

$$\nu - \mathrm{S}m(k) - \mathrm{S}^2 p(t - \lambda) - \frac{n^2 k^2}{4\,t} > 0 \tag{1.5}$$

(basta infatti riscrivere la condizione (1.3) tenendo conto che l'ultimo termine è ora $c + \lambda$).

Ne deduciamo che per ogni $\lambda > 0$ la forma (1.4) è coerciva se esistono un $k > 0$ e un $t > 0$ per i quali

$$\nu - \mathrm{S}m(k) - \mathrm{S}^2 p(t) = \frac{n^2 k^2}{4\,t} > 0 \tag{1.6}$$

(che si ottiene ponendo $t + \lambda = \tau$ e osservando che se vale la (1.6) per un certo t vale la (1.5) per il corrispondente τ). La forma (1.4) è anche coerciva per ogni $\lambda > 0$ se esiste $t \geq 0$ tale che

$$\nu - \mathrm{S}m(0) - \mathrm{S}^2 p(t) > 0 \tag{1.7}$$

(che si ha ponendo $k = 0$ nella (1.5)).

2. COERCIVITÀ NEL PROBLEMA AL CONTORNO MISTO

Anche per il problema al contorno misto premettiamo un risultato relativo agli spazi di Sobolev [3] e [5].

LEMMA 2.1. *Sia Ω aperto di $\mathbf{R}^n$ con frontiera lipschitziana uniformemente regolare che gode della proprietà di cono.*

Sia $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$: risulta

$$\| u \|_{\mathrm{L}^{2^*}(\Omega)} \leq \eta \| u \|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \tag{2.1}$$

ove $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, ed η è una costante dipendente solo da n.

Se con u indichiamo anche la traccia di u sulla frontiera si ha

$$u \in \mathrm{L}^{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega) \cap \mathrm{L}^2(\partial\Omega)\,. \tag{2.2}$$

TEOREMA 2.1. *Se oltre alle ipotesi ammesse nell'introduzione esistono $k \geq 0\,,\, t > \eta^2 p(t)$ tali che*

$$\nu - \eta m(k) - \eta^2 p(t) - \frac{(\eta m(k) + nk)^2}{4\,(t - \eta^2 p(t))} > 0 \tag{2.3}$$

e vale

$$\int_{\Gamma_1} g\varphi^2 \, d\sigma \geq 0 \tag{2.4}$$

per ogni

$$\varphi \in C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega) \quad , \quad \varphi = 0 \quad su \ \Gamma_0$$

la forma (0.9) *è coerciva su* V×V.

Dimostrazione. Poniamo

$$\gamma = \nu - \eta m(k) - \eta^2 p(t) - \frac{(\eta m(k) + nk)^2}{4(t - \eta^2 p(t))} ,$$

tenendo conto del Lemma 2.1 e della disuguaglianza di Hölder si ha

$$\int_{\Omega} [\nu \, | u_x |^2 + c^t u^2] \, dx + \int_{\Gamma_1} g u^2 \, d\sigma \leq b(u , u) - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} (b_i + d_i) \, u u_{x_i} \, dx$$

$$+ \int_{\Omega} c_t \, u^2 \, dx \leq b(u , u) - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(i,k)} (b_i + d_i) \, u u_{x_i} \, dx +$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega \setminus \Omega(i,k)} (b_i + d_i) \, u_{x_i} \, dx + \int_{\Omega} c_t \, u^2 \, dx \leq b(u , u) +$$

$$+ \eta \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| b_i + d_i \|^2_{L^n(\Omega(i,k))} \right\}^{1/2} \| u \|_{H^1(\Omega)} \| u_x \|_{L^2(\Omega)} + nk \| u \|_{L^2(\Omega)} \| u_x \|_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \eta^2 \| c_t \|_{L^{n/2}(\Omega)} \| u \|^2_{H^1(\Omega)} \leq b(u,u) + \eta m(k) (\| u_x \|^2_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)} \| u_x \|_{L^2(\Omega)}) +$$

$$+ nk \| u \|_{L^2(\Omega)} \| u_x \|_{L^2(\Omega)} + \eta^2 p(t) (\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)}) \leq$$

$$\leq b(u , u) + \eta m(k) \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ (\eta m(k) + nk) \frac{2\gamma(t - \eta^2 p(t)) + (2m(k) + nk)^2}{4(t - \eta^2 p(t)) (\eta m(k) + nk)} \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \frac{(t - \eta^2 p(t)) (\eta m(k) + nk)}{2\gamma(t - \eta^2 p(t)) + (\eta m(k) + nk)^2} \| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \eta^2 p(t) (\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)})$$

da cui poiché $c^t \geq t$

$$\left(\nu - \eta m(k) - \eta^2 p(t) - \frac{2\gamma(t - \eta^2 p(t)) + (\eta m(k) + nk)^2}{4(t - \eta^2 p(t))}\right) \| u_x \|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \left(t - \frac{(t - \eta^2 p(t)) (\eta m(k) + nk)^2}{2\gamma(t - \eta^2 p(t)) + (\eta m(k) + nk)^2} - \eta^2 p(t)\right) \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \leq b(u , u)$$

da cui, ponendo

$$\delta = \min\left(\frac{\gamma}{2} , \frac{2\gamma(t - \eta^2 p(t))^2}{2\gamma(t - \eta^2 p(t)) + (\eta m(k) + nk)^2}\right)$$

$b(u , u) \geq \delta \| u \|^2_{H^1(\Omega)}$.

Osservazione 2.1. Anche per il problema al contorno misto valgono proprietà simili a quelle espresse nell'Osservazione 1.1.

La forma

$$b(u, v) + \lambda (u, v)_{L^2(\Omega)} \tag{2.5}$$

è coerciva in V per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui esistono $k \geq 0$ e $t > \eta^2 p(t-\lambda)$ tali che

$$\nu - \eta m(k) - \eta^2 p(t-\lambda) - \frac{(\eta m(k) + nk)^2}{4(t - \eta^2 p(t-\lambda))} > 0 . \tag{2.6}$$

Se ne deduce che per ogni $\lambda > 0$ la forma (2.5) è coerciva se esistono $k \geq 0$, $t > \eta^2 p(t)$, tali che

$$\nu - \eta m(k) - \eta^2 p(t) = \frac{(\eta m(k) + nk)^2}{4(t - \eta^2 p(t))} > 0 \tag{2.7}$$

oppure se risulta $m(0) = 0$ e per $t \geq \eta^2 p(t)$ si ha

$$\nu > \eta^2 p(t). \tag{2.8}$$

3. ESISTENZA E UNICITÀ

TEOREMA 3.1. *Nelle ipotesi del Teorema 1.1. esiste una e una sola soluzione del problema* (0.2).

TEOREMA 3.2. *Nelle ipotesi del Teorema 2.1 esiste una e una sola soluzione del problema* (0.8).

Dimostrazione dei Teoremi 3.1. e 3.2. Per le ipotesi fatte sui coefficienti le forme a e b sono continue rispettivamente su $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e $V \times V$, per i Teoremi 1.1 e 2.1 sono coercive, allora dal teorema di Lax–Milgram [6] segue l'asserto.

Osservazione 3.1. Naturalmente i problemi (0.2) e (0.8) possono essere formulati anche con dati non omogenei alla frontiera e pur di fare opportune ipotesi per tali dati sussistono ancora teoremi di esistenza e unicità. Queste ipotesi sono già state espresse in [1], Osservazione 2.

Osservazione 3.2. Lo spettro degli operatori associati alla forma bilineare, che compare nei problemi (0.2) e (0.8), rispettivamente definiti in $H_0^1(\Omega)$ e V, non è tutto $\mathbf{R}$: si può infatti trovare λ sufficientemente grande in modo che siano soddisfatte la disequazione (1.5) per il problema di Dirichlet e la (2.6) per il problema misto: ad esempio per la (1.5), determinati $\bar{k}$ e $\bar{t}$ in modo che si abbia $m(\bar{k}) < \nu/3$ e $\dfrac{n^2 \bar{k}^2}{4\bar{t}} < \nu/3$, basta osservare che, per λ sufficientemente grande, $S^2 p(\bar{t} - \lambda) < \nu/3$.

Osservazione 3.3. Le condizioni (1.3) e (2.3) non sono né più né meno restrittive di quelle ammesse in [1] e [2] per provare teoremi di esistenza e unicità. Infatti le ipotesi ammesse in [1] e in [2] non impongono ai b_i altro che l'appartenenza ad un dato spazio e quindi esistono forme che le soddisfano senza che possano verificare (1.3) e (2.3), viceversa però in [1] e [2] se i d_i sono nulli si richiede a c di essere positivo nel senso delle distribuzioni mentre (1.3) e (2.3) permettono a c di essere anche negativo, purché la norma della parte negativa non sia troppo grande.

Illustreremo brevemente ciò nel prossimo numero con un esempio.

4. Esempio.

Consideriamo la seguente forma bilineare continua su $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.

$$d(u\,,v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} u_{x_i}v_{x_i}\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega} q\,uv\,\mathrm{d}x \qquad q\in L^{n/2}(\Omega)+L^{\infty}(\Omega) \tag{4.1}$$

che traduce in forma variazionale l'operatore di Schroedinger; poniamo

$$q_0=\frac{|q|-q}{2}$$

e sia

$$\|q_0\|_{L^{n/2}(\Omega)}<\frac{1}{S^2}\,. \tag{4.2}$$

Allora ogni $\lambda>0$ appartiene al risolvente dell'operatore associato a d. Infatti la condizione (1.7) è verificata ponendo $t=0$.

È chiaro che se avessimo dovuto utilizzare i Teoremi 1 e 2 di [1] avremmo dovuto imporre $q\geq K>0$ (nel senso delle distribuzioni) mentre (4.2) permette a q di essere anche negativo.

Bibliografia

[1] G. F. Bottaro e M. E. Marina, *Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati*, « Boll. U.M.I. », (4) *8*, 46–56 (1973).

[2] G. F. Bottaro, *Problema al contorno misto per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *55*, 187 (1973).

[3] F. E. Browder, *On the spectral theory of elliptic differential operators*. I, « Math. Annalen », *142*, 22–130 (1961).

[4] H. Federer e W. L. Fleming, *Normal and integral currents*, « Ann. of Math. », *72*, 458–520 (1960).

[5] E. Gagliardo, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, « Ricerche di Matematica », *7*, 102–137 (1958).

[6] P. D. Lax e A. N. Milgram, *Parabolic equations*, « Ann. Math. Studies », *33*, 167–190 (1954).