Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Laura Toti-Rigatelli

Un'osservazione sugli anelli euclidei generalizzati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.5, p. 331–333.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_331_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Algebra. — *Un'osservazione sugli anelli euclidei generalizzati* (*). Nota di LAURA TOTI RIGATELLI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We show that if A is a euclidean ring (in the generalized sense, see Samuel [2]), then one can choose a " remainder function " $\rho : A \times (A - \{0\}) \to A$, with the same nice properties as the positive remainder of the euclidean division in the ring of integers.

1. INTRODUZIONE

In questa Nota si dimostra che fra tutte le « funzioni resto » che si possono definire su un anello euclideo, ne esiste una che ha proprietà analoghe a quelle del « resto positivo » della divisione euclidea nell'anello degli interi.

Ora e nel seguito, per anello euclideo intenderemo (usando una semplice generalizzazione dovuta a Samuel [1], [2]) un anello A per cui esista un ordinale α e una funzione v da A ad α (« valutazione ») con le proprietà:

(1) comunque scelti $a, b \in A$ con $b \neq 0$, esiste almeno una coppia $(q, r) \in A^2$ con

(1,1) $$a = bq + r,$$

(1,2) $$vr < vb.$$

È ovvio che la v si può scegliere in modo che inoltre sia:

(2) $$vx = 0 \quad \text{se e soltanto se} \quad x = 0.$$

Ovviamente gli anelli « euclidei » nel senso più ristretto dei trattati istituzionali, sono euclidei nel senso sopra indicato.

È aperto (cfr. P. Samuel [1], [2]) il problema se si possa sempre prendere $\alpha = \omega$.

È anzitutto evidente che la proprietà (1) può essere scritta nella forma:

(1') esiste una « funzione resto » $\rho : A \times (A - \{0\}) \to A$ per cui:

(1',1) $a - \rho(a, b) \in (b)$ $(a, b \in A, b \neq 0)$, ((b) essendo l'ideale generato da b)

(1',2) $$v\rho(a, b) < vb \qquad (a, b \in A, b \neq 0).$$

Pur non aggiungendo nulla al concetto, la nuova forma della (1) permette di chiedersi se la ρ possa venir scelta in modo da avere ulteriori proprietà che leghino, in qualche modo, « resti » ottenuti da coppie diverse.

(*) Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R. (Gruppo Nazionale per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni, Anno 1973).

(**) Nella seduta del 26 novembre 1973.

Un'ispezione della situazione più familiare, quella dell'anello degli interi, mostra subito che la ρ più « naturale » in questo caso (quella che ad (a, b) associa il minimo r non negativo con $a - r \in (b)$) ha, per esempio, le seguenti ovvie proprietà:

(i) se $a \equiv b\,(c)$ allora $\rho(a, c) = \rho(b, c)$ $(a, b, c \in \mathrm{A})$,

(ii) se $(b) = (c)$ allora $\rho(a, b) = \rho(a, c)$ $(a, b, c \in \mathrm{A})$,

(iii) se $(b) \supseteq (c)$ allora $\rho(\rho(a, b), c) = \rho(a, b)$ $(a, b, c \in \mathrm{A})$.

Come si vedrà, una simile scelta può venire effettuata per ogni anello euclideo. Notiamo che la proprietà (ii) ci mette in grado di definire in modo ovvio il concetto di resto di un elemento rispetto a un ideale non ridotto al solo zero. Il risultato principale di questo lavoro è convenientemente riassunto nella definizione e nel teorema seguenti, la cui formulazione è stata scelta anche in vista di ulteriori generalizzazioni nell'ordine di idee di [3].

DEFINIZIONE. *Un anello* A, *commutativo e dotato di unità moltiplicativa, è detto* FORTEMENTE EUCLIDEO *se esistono un ordinale* α, *una funzione* v *da* A *ad* α, *una funzione* ρ *da* $\mathrm{A} \times \mathfrak{J}(\mathrm{A})$ *ad* A ($\mathfrak{J}(\mathrm{A})$ *essendo l'insieme degli ideali di* A) *tali che*:

(3,1) $va = 0$ se e soltanto se $a = 0$,

(3,2) $\rho(0, \mathrm{J}) = 0$ $(\mathrm{J} \in \mathfrak{J}(\mathrm{A}))$,

(3,3) se $a \equiv b\,(\mathrm{J})$ allora $\rho(a, \mathrm{J}) = \rho(b, \mathrm{J})$ $(a, b \in \mathrm{A}, \mathrm{J} \in \mathfrak{J}(\mathrm{A}))$,

(3,4) se $b \in \mathrm{J}, b \neq 0$ allora $v\rho(a, \mathrm{J}) < vb$ $(a \in \mathrm{A}, \mathrm{J} \in \mathfrak{J}(\mathrm{A}))$,

(3,5) se $\mathrm{L} \supseteq \mathrm{J}$ allora $\rho(\rho(a, \mathrm{L}), \mathrm{J}) = \rho(a, \mathrm{L})$ $(a \in \mathrm{A}, \mathrm{L}, \mathrm{J} \in \mathfrak{J}(\mathrm{A}))$,

(3,6) $a - \rho(a, \mathrm{J}) \in \mathrm{J}$ (1) $(a \in \mathrm{A}, \mathrm{J} \in \mathfrak{J}(\mathrm{A}))$.

TEOREMA. *Un anello è fortemente euclideo se e soltanto se è euclideo.*

2. Allo scopo di dimostrare il teorema premettiamo il seguente

LEMMA. *Per ogni anello euclideo* A, *esistono un ordinale* α *e una funzione* $v : \mathrm{A} \to \alpha$ *soddisfacente la* (1) *e inoltre le*:

(2) $vx = 0$ se e soltanto se $x = 0$,

(4) v è biiettiva.

Dimostrazione. Siano β e w l'ordinale e la valutazione relativi all'anello euclideo A; possiamo naturalmente supporre $w0 = 0$.

Per ogni $n \in w(\mathrm{A})$ siano:

$$\mathrm{W}_n = \{x \in \mathrm{A} : wx = n\} \quad ; \quad \alpha_n = \mathrm{Card.}\ \mathrm{W}_n \text{ (2)}$$

(1) Come conseguenza delle proprietà, si ha: $\rho(a, \{0\}) = a$.

(2) Identifichiamo, come è d'uso, ciascun cardinale col minimo ordinale della stessa potenza.

e fissiamo una biiezione f_n da W_n ad α_n; in particolare per $n = 0$ scegliamo f_0 in modo che sia $f_0\, 0 = 0$. L'insieme $\alpha = \bigcup_{n \in w(A)} (\{n\} \times \alpha_n)$ è ovviamente ben ordinato dall'ordine lessicografico (dall'ordine cioè per cui $\langle n, i \rangle < \langle m, j \rangle$ se e soltanto se $n < m$ oppure $n = m$ e $i < j$).

Definiamo ora su A una v, mediante la:

$$vx = \langle wx, f_{wx}\, x \rangle \qquad (x \in A).$$

È chiaro che:

(2′) $\qquad vx = \langle 0, 0 \rangle$ se e soltanto se $x = 0$,

(4) $\qquad v$ è biiettiva.

La validità della (1) segue dal fatto che se $wx < wy$ è anche $vx < vy$. Poiché α con l'ordine detto è isomorfo a un (unico) ordinale, resta dimostrato il lemma.

3. Siamo ora in grado di stabilire il teorema precedentemente enunciato. Siano anzitutto α, v relativi ad A con le proprietà (1), (2), (4). Definiamo

$$\rho(a, J) = v^{-1} \min \{v(a + j) : j \in J\} \qquad (a \in A, J \in \mathfrak{J}(A)).$$

Mostriamo che A è fortemente euclideo relativamente a α, v e ρ.

La (3,1) coincide con la (2). Si ha poi:

$$\rho(0, J) = v^{-1} \min \{v(0 + j) : j \in J\} = v^{-1}\, 0 = 0 \qquad \text{cioè la } (3,2).$$

Per quanto riguarda la (3,3): se $a \equiv b\,(J)$, allora $a + J = b + J$ e da qui la tesi.

Per la (3,4): sia $b \in J$, $b \neq 0$, si ha allora:

$$v\rho(a, J) = vv^{-1} \min \{v(a + j) : j \in J\} = \min \{v(a + j) : j \in J\} < vb.$$

La (3,6) è ovvia.

Infine, per quanto riguarda la (3,5): siano $a \in A$, L, $J \in \mathfrak{J}(A)$ con $L \supseteq J$; sarà per un opportuno $l^* \in L$:

$$\rho(a, L) = v^{-1} \min \{v(a + l) : l \in L\} = a + l^*,$$

essendo $J \subseteq L$, si ha:

$$\{a + l^* + j : j \in J\} \subseteq \{a + l : l \in L\}.$$

Si trova allora:

$$a + l^* \geq \min \{v(a + l^* + j) : j \in J\} \geq \min \{v(a + l) : l \in L\} \geq a + l^*,$$

da cui l'asserto.

È poi evidente che A, se è fortemente euclideo, risulta euclideo.

BIBLIOGRAFIA

[1] SAMUEL P., *Unique factorisation*, «Amer. Math. Monthly», *75*, 945–952 (1968).
[2] SAMUEL P., *About Euclidean Rings*, «J. Algebra», *19*, 282–301 (1971).
[3] TOTI RIGATELLI L., *Una sottoclasse della classe degli anelli noetheriani, «analoga» alla classe degli euclidei*, «Ann. Univ. Ferrara», sez. VII, *17* (3), 27–33 (1971).