ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ANDRÉ BATBEDAT

Préanneaux idempotents

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 55 (1973), n.5, p. 325–330.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_325_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Préanneaux idempotents.* Nota di ANDRÉ BATBEDAT, presentata (*) dal Corrisp. G. ZAPPA.

RIASSUNTO. — Richiamate in breve le nozioni di preanello e di prealgebra introdotte recentemente da P. Janin [5], si determina la struttura dei preanelli idempotenti, essa risulta più generale di quella di preanello booleano studiata in [4].

INTRODUCTION

L'étude des structures de préanneau et de préalgèbre est récente et les résultats obtenus se trouvent essentiellement dans des thèses ou des comptes rendus. Aussi avons-nous consacré le Chapitre I à leur présentation: on peut dire succinctement qu'un préanneau est à un anneau ce qu'un espace affine est à un module; le passage se fait par oubli du zéro.

On connaît, en théorie des anneaux et en théorie des treillis, l'importance des anneaux booléens. Dans le Chapitre II nous considérons les préanneaux idempotents et nous établissons des conditions nécessaires qui permettent, au Chapitre III de déterminer leur structure.

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES PRÉALGÈBRES

Soit π un anneau (associatif) de neutre 1 et de zéro ω .

Nous avons montré ([1], Théorème 3) qu'un π -espace affine F peut être caractérisé comme l'ensemble F muni d'une application de $F^2 \times \pi \times F$ dans F , notée (a, b, α, c) , appelée *opération affine*, et vérifiant:

$$A_1: (a, b, 1, c) = (c, b, 1, a) \text{ et } (a, a, 1, b) = b$$

$$A_2: (a, b, \alpha + \beta, c) = (a, b, \alpha, (a, b, \beta, c))$$

$$A_3: ((a, b, \alpha, c), d, \beta, e) = (a, b, \alpha\beta, (c, d, \beta, e)).$$

Un *sous-espace affine* M de F est une partie de F stable pour l'opération affine, quel que soit $\alpha \in \pi$.

Un *morphisme* de π -espaces affines de F dans F' est une application θ vérifiant pour tous a, b, c , de F , α de π :

$$((a, b, \alpha, c)) \theta = ((a) \theta, (b) \theta, \alpha, (c) \theta).$$

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de π -espaces affines: l'ensemble produit des F_i , muni de l'opération $((a_i), (b_i), \alpha, (c_i)) = ((a_i, b_i, \alpha, c_i))$, est le *π -espace affine produit* des F_i .

(*) Nella seduta del 26 novembre 1973.

Soit F un π -espace affine; F est canoniquement muni de la loi ternaire: $(a, b, c) \rightarrow a - b + c = (a, b, 1, c)$ (notation justifiée par A_1'). On montre que cette loi ternaire est associative c'est-à-dire vérifie:

$$(a - b + c) - d + e = a - (b - c + d) + e = a - b + (c - d + e).$$

Plus généralement la notation: $a - b + c$, permet de modifier l'ordre des couples: signe, lettre (+ étant sous-entendu pour la première) et d'utiliser les parenthèses en appliquant la règle des signes.

La structure ternaire ainsi obtenu sur F est qualifiée de: *groupe ternaire tripotent* (tripotent en raison de: $a - a + a = a$). Pour des précisions sur la notion de groupe ternaire on pourra consulter [3]; en particulier on y trouvera sept caractérisations d'un groupe ternaire tripotent.

Nous venons de justifier l'expression: un π -espace affine est un groupe ternaire tripotent.

Réciproquement nous dirons qu'un groupe ternaire tripotent est un π -espace affine s'il est muni d'une opération affine: (a, b, α, c) pour laquelle $(a, b, 1, c)$ est la loi ternaire initiale. Des conventions analogues seront appliquées à d'autres structures sans de nouvelles explications.

En [1], Théorème 1, nous avons démontré la:

PROPOSITION I.1. *Tout groupe ternaire tripotent est un Z -espace affine (Z : anneau des entiers relatifs).*

DÉFINITION I.2. *Un groupe ternaire tripotent est de caractéristique n ($n > 1$) si c'est un Z/n -espace affine.*

Une loi ternaire: $(a, b, c) \rightarrow d$, est *commutative* si d est indépendant de l'ordre de a, b, c .

THÉORÈME I.3. *Un groupe ternaire tripotent G est de caractéristique 2 si et seulement si il est commutatif.*

Preuve. Si G est un $Z/2$ -espace affine:

$$\begin{aligned} (b, a, 1, c) &= (a, b, \omega, (b, a, 1, c)) \\ &= (a, b, 1, (a, b, 1, (b, a, 1, c))) \\ &= (a, b, 1, c). \end{aligned}$$

Si G est commutatif. On détermine une opération affine canonique associée à $Z/2$ en posant: $(a, b, \omega, c) = c$ et $(a, b, 1, c) = a - b + c$.

A la fin de [3] nous avons relié la propriété algébrique de commutativité pour un groupe ternaire tripotent à des propriétés géométriques sur le Z -espace affine associé par l'intermédiaire des translations et des symétries...

Dans [5] P. Janin a défini un *préanneau* P comme un groupe ternaire tripotent (nous adaptons sa définition compte tenu de [3]), muni d'un produit binaire: $(a, b) \rightarrow ab$, associatif et distributif dans le sens suivant:

$$\begin{aligned} (a - b + c) d &= ad - bd + cd \\ d(a - b + c) &= da - db + dc. \end{aligned}$$

Tout préanneau P est muni de la loi binaire: $(a, b) \rightarrow a \vee b = a - ab + b$, appelée *disjonction* [5]; le groupe ternaire tripotent P muni de la disjonction est un préanneau $\bar{P}$. La disjonction sur $\bar{P}$ étant le produit initial sur P , le passage de P à $\bar{P}$ est appelé *dualité* [5]; dans la suite nous utiliserons exclusivement cette dualité.

Comme pour un anneau les notions de commutativité, d'élément neutre, zéro ou idempotent ($a^2 = a$), $\dots$, pour un préanneau concernent le produit.

On vérifie que:

LEMME I.4. *La dualité conserve la commutativité et l'idempotence. Elle échange zéro à gauche [resp.: à droite] et neutre à gauche [resp.: à droite].*

Dans [2] nous définissons une π -*préalgèbre* P comme un π -espace affine muni d'un produit binaire distributif dans le sens suivant:

$$(a, b, \alpha, c) d = (ad, bd, \alpha, cd)$$

$$d(a, b, \alpha, c) = (da, db, \alpha, dc).$$

Ici ce produit sera toujours associatif.

Une *sous-préalgèbre* de la π -préalgèbre P est un sous-espace affine stable pour le produit.

Un *morphisme* de π -préalgèbres est un morphisme θ pour les π -espaces affines vérifiant aussi: $(ab)\theta = (a)\theta(b)\theta$.

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de π -préalgèbres: le π -espace affine produit des P_i , muni du produit binaire $(a_i)(b_i) = (a_i b_i)$, est la π -*préalgèbre produit* des P_i .

Dans [2] nous avons établi les deux propriétés suivantes:

PROPOSITION I.5. *Une π -préalgèbre est une π -algèbre si et seulement si elle contient un zéro.*

PROPOSITION I.6. *Toute π -préalgèbre est un préanneau. Tout préanneau est une Z -préalgèbre.*

La *caractéristique* d'une π -préalgèbre P est celle du groupe ternaire tripotent P (Définition I.2); c'est donc aussi celle du préanneau P .

La dualité conservant le groupe ternaire tripotent on obtient le:

LEMME I.7. *La dualité conserve la caractéristique.*

II. PRÉALGÈBRES IDEMPOTENTES

Une π -préalgèbre est idempotente si tout élément est idempotent.

Exemples fondamentaux:

i) Tout *anneau booléen* est un préanneau idempotent avec zéro, commutatif et de caractéristique 2. Tout préanneau idempotent avec zéro est un anneau booléen (Proposition I.5).

ii) Par dualité il en résulte que tout *préanneau idempotent unitaire* est commutatif et de caractéristique 2.

iii) Tout π -espace affine est clairement une π -préalgèbre pour le produit: $ab = a$. Un tel préanneau, qui est idempotent, sera appelé *préanneau neutre à droite* (on pourrait aussi bien dire: préanneau zéro à gauche).

iv) Par dualité un *préanneau neutre à gauche* est muni du produit: $ab = b$.

Tout ensemble avec un seul élément est de manière unique une π -préalgèbre idempotente que l'on qualifie de *triviale*; un tel préanneau peut être rattaché à l'un quelconque des exemples précédents.

Les exemples iii) et iv) montrent que, contrairement au cas des anneaux, un *préanneau idempotent n'est pas nécessairement commutatif ou de caractéristique 2*.

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de π -préalgèbres, P leur produit, p_i un élément distingué idempotent dans chaque P_i et Q_i la partie de P , ensemble des $(a_j)_{j \in I}$ pour lesquels a_i parcourt P_i et $a_j = p_j$ pour tout $j \neq i$; on vérifie que:

LEMME II.1. *Pour tout $i \in I$, Q_i est une sous-préalgèbre de P isomorphe à P_i .*

On peut ainsi identifier P_i et Q_i . L'exemple iii) montre que ce plongement des composantes dans le produit est valable pour des π -espaces affines.

Nous allons maintenant faire une construction très importante pour la suite.

Soit B un anneau booléen, C un préanneau idempotent unitaire, D un préanneau neutre à droite, E un préanneau neutre à gauche et A leur produit, ensemble des (b, c, d, e) muni des lois canoniques: A est un préanneau idempotent.

Considérons un élément distingué dans chacun de ces ensembles: nous choisissons le zéro b_0 de B , le neutre c_0 de C , un élément d_0 [resp.: e_0] de D [resp.: E] et $k = (b_0, c_0, d_0, e_0)$. Par le Lemme II.1, on peut maintenant identifier B, C, D, E , à des sous-préalgèbres de A ; en particulier b_0, c_0, d_0, e_0 , se confondent avec k .

Ceci étant chaque élément a de A s'écrit de manière unique: $b + c + d + e - k - k - k$ ou plus simplement: $a = b + c + d + e - 3k$.

Soit $a_i = b_i + c_i + d_i + e_i - 3k$ avec $i \in \{1, 2\}$: il résulte de nos hypothèses que le produit $a_1 a_2$ dans A est donné par:

$$a_1 a_2 = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 + e_2 - 3k.$$

où $b_1 b_2$ [resp.: $c_1 c_2$] est le produit dans B [resp.: C]. Comme k est zéro dans B et neutre dans C , on obtient le:

LEMME II.2. *Quels que soient $b \in B, c \in C, d \in D, e \in E$, ils vérifient dans A :*

$$bc = cb = cd = ec = c \quad ; \quad db = d \quad ; \quad be = e;$$

$$ce = c - k + e \quad ; \quad dc = d - k + c \quad ; \quad de = d - k + e;$$

$$bd = eb = ed = k.$$

Par convention $x \vee (yz)$ et $(xy) \vee z$ seront notés sans parenthèses.
 Pour tout $a = b + c + d + e - 3k$ on vérifie que:

$$\begin{aligned} ka &= c - k + e & ; & & ak &= c - k + d & ; & & k \vee a &= b - k + d; \\ a \vee k &= b - k + e. \end{aligned}$$

On en tire le:

LEMME II.3. *Pour tout $a = b + c + d + e - 3k$ de A:*

- i) $k \vee a \vee k = b$;
- ii) $kak = c$;
- iii) $(k \vee a)k = k \vee ak = d$;
- iv) $ka \vee k = k(a \vee k) = e$.

Ainsi la partie B [resp.: C, D, E] est encore l'ensemble des: $k \vee a \vee k$ [resp.: $kak, k \vee ak, ka \vee k$] pour a parcourant A.

Nous allons montrer que cette situation est générale.

III. STRUCTURE DES PRÉANNEAUX IDEMPOTENTS

Soit P un préanneau idempotent, $k \in P$, B l'ensemble des: $k \vee x \vee k$, C l'ensemble des: kxk , D l'ensemble des: $k \vee xk$ et E l'ensemble des: $kx \vee k$ pour x parcourant P.

La dualité échange B et C. Comme: $k \vee xk = (k \vee x)k$, et $kx \vee k = k(x \vee k)$, elle échange aussi D et E.

LEMME III.1. *B, C, D, E sont des sous-préanneaux de P. Les lois induites font de:*

- B) un anneau booléen de zéro k ;
- C) un préanneau idempotent de neutre k ;
- D) un préanneau neutre à droite;
- E) un préanneau neutre à gauche.

Preuve. La stabilité pour la loi ternaire résulte de la distributivité du produit et de la disjonction.

C est évidemment stable pour le produit et k est neutre dans C. $d_1 d_2 = d_1$ pour d_1 et d_2 dans D résulte de l'égalité: $k(k \vee yk) = k$.

On termine en utilisant la dualité.

On peut alors considérer le préanneau A du II, produit de B, C, D, E.

Soit θ l'application de A dans P:

$$\theta: (b, c, d, e) \in A \rightarrow b + c + d + e - 3k \in P,$$

et ψ l'application de P dans A:

$$\psi: x \in P \rightarrow (k \vee x \vee k, kxk, k \vee xk, kx \vee k) \in A.$$

LEMME III.2. θ et ψ sont réciproques et respectent les lois ternaires.

Preuve. Compte tenu des propriétés de k (Lemme III.1) on voit que θ puis ψ est l'identité sur A .

Développons: $k \vee x \vee k + kxk + k \vee xk + kx \vee k - 3k$; il vient: $(k + x - xk - kx + kxk) + kxk + (k - kxk + xk) + (kx - kxk + k) - 3k$, c'est-à-dire: x . Par conséquent ψ puis θ est l'identité sur P .

COROLLAIRE III.3. Soit $(b, c, d, e) \in A$ avec: $b = k \vee y \vee k, c = kzk, d = k \vee tk, e = ku \vee k$: Il existe $x \in P$ pour lequel: $b = k \vee x \vee k, c = kxk, d = k \vee xk, e = kx \vee k$.

LEMME III.4. Les propriétés du Lemme II.2 sont vérifiées dans P .

Preuve. $ec = ekxk = kxk = c$, puisque k est zéro à droite dans E .

Pour des raisons analogues: $bc = cb = cd = c$; $db = d$; $be = e$.

On utilise maintenant le Corollaire III.3:

$$ed = (kx \vee k)(k \vee xk) = k$$

$$c \vee e = kxk \vee kx \vee k = kxk \vee k = k \quad \text{car} \quad kxk \vee kx = kxk.$$

De même: $d \vee c = k$.

Enfin par dualité: $d \vee e = bd = eb = k$.

Développons alors dans P le produit:

$$(b_1 + c_1 + d_1 + e_1 - 3k)(b_2 + c_2 + d_2 + e_2 - 3k).$$

Après simplification on obtient: $b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 + e_2 - 3k$, ce qui prouve que θ respecte le produit; c'est donc un isomorphisme de préanneaux.

D'où le:

THÉORÈME III.5. Tout préanneau idempotent est isomorphe à un produit de préanneaux constitué par:

- un anneau booléen;*
- un préanneau idempotent unitaire;*
- un préanneau neutre à droite;*
- un préanneau neutre à gauche.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BATBEDAT, *Une généralisation de la notion d'espace affine*, « Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris », 276, A-169 (1973).
- [2] A. BATBEDAT, *Préalgèbres*, « Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris », 276, A-783 (1973).
- [3] A. BATBEDAT, *Sur la notion d'élément inversible dans un binaire ou dans un ternaire*, « Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris », 277, A-409 (1973).
- [4] P. JANIN, *Une généralisation des structures booléennes*, Thèse de 3ème cycle, faculté des sciences de Lyon (1966).
- [5] P. JANIN, *Préanneaux*. Thèse de doctorat, faculté des sciences de Lyon (1968).