Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Anna Flavia Abeasis

## Sulla somma di operatori non lineari

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **55** (1973), n.5, p. 314–321.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_314_0>

**Matematica.** — *Sulla somma di operatori non lineari.* Nota di ANNA FLAVIA ABEASIS (*), presentata (**) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — Let Q be a closed cone on a Banach space X and $f, g$ operators: $D \subset Q \to X$, $f, g \in K_B(Q)$.

In this paper we give some sufficient conditions for the existence of solutions of the equation

$$\lambda x - f(x) - g(x) = y \qquad \text{with } \lambda > 0 \text{ and } y \in Q.$$

## 1. DEFINIZIONI E ALCUNI RISULTATI NOTI

Sia X uno spazio di Banach di norma $|\cdot|$, Q un cono convesso chiuso di X e $f$ una applicazione $f: D_f \subset Q \to X$, tale che $f(0) = 0$.

Indichiamo con B (X) l'insieme delle funzioni limitate $f: D_f \subset X \to X$ cioè tali che:

$$\|f\|_B = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{|x|}, x \neq 0, x \in D_f \right\} < +\infty$$

e con $B^l(X)$ l'insieme delle funzioni $f: D_f \subset X \to X$ localmente limitate cioè tali che per ogni $r$:

$$\|f\|_B^r = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{|x|}, x \neq 0, x \in D_f^r = D_f \cap S(0, r) \right\}^{(1)} < +\infty.$$

Indicheremo inoltre con Lip (X) l'insieme delle $f: D_f \subset X \to X$ tali che:

$$\|f\|_L = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}, x \neq y, x, y \in D_f \right\} < +\infty.$$

Data $f: D_f \subset Q \to X$ indichiamo con $\rho_Q(f)$ l'insieme risolvente di $f$ (relativo a Q) e con $R_Q(\lambda, f) = (\lambda - f)^{-1}$ la risolvente di $f$ (relativa a Q) secondo le definizioni date in [2].

Diremo (cfr. [2]) che un'applicazione $f: D_f \subset Q \to X$ è di classe $K_L(Q)$ se $\rho_Q(f) \supset R_+$ e se

$$\|R_Q(\lambda, f)\|_L < \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \lambda \in R_+.$$

Diremo che un'applicazione $f: D_f \subset Q \to X$ è di classe $K_B(Q)$ se $\rho_Q(f) \supset R_+$ e se

$$\|R_Q(\lambda, f)\|_B < \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \lambda \in R_+.$$

(*) Ricercatrice dell'Instituto de Fisica e Matemática di Lisbona.

(**) Nella seduta del 26 novembre 1973.

(1) $S(x, r)$ denota la sfera chiusa di centro $x$ e raggio $r$.

Sia $f$ una funzione la cui risolvente $R_Q(n, f)$ esiste per ogni $n$ intero positivo; si definisce allora la funzione $f_n : Q \to X$

$$f_n(x) = nR_Q(n, f)(nx) - nx$$

e si dice che $f$ è regolare se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in D_f .$$

Vale inoltre la seguente proposizione (cfr. [3]).

PROPOSIZIONE 1.1. *Data* $f : D_f \subset Q \to X$ *continua,* $f \in B^l(x)$ *e* $f \in K_B(Q)$, *allora* $f$ *è regolare.*

*Dimostrazione.* Infatti si ha

$$(1.1) \qquad |R(n, f)\, nx - x| \leq \frac{1}{n} \|f\|_B^{|x|} |x| \qquad \forall x \in D_f$$

da cui, dato $\varepsilon > 0$, si ha

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(R(n, f)(nx)) - f(x)| < \varepsilon$$

non appena $n$ è abbastanza grande.

Ricordiamo i seguenti risultati di Da Prato in [2].

Date due applicazioni $f, g \in K_B(Q)$, considerata l'applicazione somma $f + g_n$, definita in $D_f$, per essa vale la maggiorazione a priori

$$(1.2) \qquad |x| \leq |\lambda x - f(x) - g_n(x)| \qquad \begin{array}{l} x \in D_f \\ \lambda, n > 0 \end{array}$$

di cui la seguente proposizione è conseguenza immediata:

PROPOSIZIONE 1.2. *Se* $f, g \in K_B(Q)$ *e* $g$ *è regolare allora si ha*

$$(1.3) \qquad |x| \leq \frac{1}{\lambda} |\lambda x - f(x) - g(x)| \qquad \begin{array}{l} x \in D_f \cap D_g \\ \lambda > 0 \end{array}$$

PROPOSIZIONE 1.3. *Siano* $f, g \in K_B(Q)$ *e sia* $R_Q(\lambda, f)$ *compatta per ogni* $\lambda > 0$; *allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$\lambda x - f(x) - g_n(x) = y \qquad n, \lambda > 0, y \in Q$$

*è compatto e non vuoto.*

TEOREMA 1.1. *Siano* $f, g \in K_B(Q)$, $g$ *uniformemente continua sui limitati di* $Q$, $R(\lambda, f)$ *compatta per ogni* $\lambda > 0$ *e* $f$ *a grafico chiuso in* $Q \times X$, *essendo* $Q$ *dotato della topologia forte e* $X$ *della topologia debole. Allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$\lambda x - f(x) - g(x) = y \qquad \begin{array}{l} n, \lambda > 0 \\ y \in Q \end{array}$$

*è compatto e non vuoto.*

## 2. Sulla somma di operatori di classe $K_B(Q)$

Consideriamo il problema di cui al Teorema 1.1, cioè di trovare condizioni sufficienti affinché l'equazione

$$\lambda x - (f+g)x = y \qquad \lambda > 0 , y \in Q \tag{2.1}$$

ammetta soluzione tentando di indebolire l'ipotesi di uniforme continuità.

Si hanno allora i seguenti risultati:

Teorema 2.1. *Siano* $f, g \in K_B(Q)$, $g : Q \to X$ *continua e limitata sui limitati di* $Q$. *Supponiamo inoltre che* $R_Q(\lambda, f)$ *sia compatta, per ogni* $\lambda > 0$. *Allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$\lambda x - (f+g)x = y \qquad \lambda > 0 , y \in Q \tag{2.2}$$

*è compatto e non vuoto.*

*Dimostrazione*. Consideriamo l'equazione

$$\mathrm{I}_n) \qquad \lambda x - f(x) - g_n(x) = y \qquad y \in Q , \lambda > 0 , n > 0 .$$

Per la Proposizione 1.3, $\mathrm{I}_n$ ammette soluzione; sia $x_n$ una di esse.

Per la (1.2) si ha per ogni $n$:

$$|x_n| \leq \frac{1}{\lambda} |y| . \tag{2.3}$$

Risolvere l'equazione $\mathrm{I}_n$ è equivalente a risolvere

$$\mathrm{J}_n) \qquad z - g_n R(\lambda, f) z = y \qquad y \in Q , \lambda > 0 , n > 0 .$$

ove si è posto

$$z = \lambda x - f(x). \tag{2.4}$$

Data la corrispondenza tra le soluzioni di $\mathrm{I}_n$ e quelle di $\mathrm{J}_n$, si ha che esistono soluzioni $z_n$ di $\mathrm{J}_n$.

Considerata una successione $\{z_n\}$ di soluzioni di $\mathrm{J}_n$, $\forall n > 0$, si ha che essa è limitata; infatti vale la seguente maggiorazione:

$$|z_n| \leq |y| + |g_n(x_n)| \leq |y| + |g R(n, g) n x_n| \leq |y| + \frac{\|g\|_B^{|y|}}{\lambda} |y|$$

essendo $g$ limitata localmente e valendo la (2.3).

Per la compattezza di $R(\lambda, f)$, esiste una sottosuccessione $\{z_{n_k}\}$ tale che la successione $\{x_k\} = \{R(\lambda, f) z_{n_k}\}$ converge.

Sia $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Si ha allora che $x$ è una soluzione della (2.2). Infatti basta dimostrare che

$$y = \lambda x_k - f(x_k) - g_k(x_k) \to \lambda x - f(x) - g(x).$$

Ora dato $\varepsilon > 0$, per $k$ abbastanza grande vale la seguente disuguaglianza:

$$|g_k(x_k) - g(x)| \leq |g_k(x_k) - g_k(x)| + |g_k(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Essa segue dalle maggiorazioni (2.5) e (2.6):

$$(2.5)\quad |g_k(x_k) - g_k(x)| = |g(\mathrm{R}(k, g) k x_k) - g(\mathrm{R}(k, g) k x)| < \varepsilon/2 \quad \text{per } k > k_\varepsilon$$

che vale essendo $g$ continua e valendo, per $k$ abbastanza grande, la

$$|\mathrm{R}(k, g) k x_k - \mathrm{R}(k, g) k x| \leq |x_k - x| +$$

$$+ \frac{1}{k} |g(\mathrm{R}(k, g) k x_k) - g(\mathrm{R}(k, g) k x)| < \eta/2 + \frac{2}{k} \|g\|_{\mathrm{B}}^{|y|} \frac{|y|}{\lambda} < \eta$$

dove $\eta > 0$ arbitrario.

$$(2.6)\qquad |g_k(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per} \quad k > \bar{k}_\varepsilon$$

che vale per la regolarità di $g$ (cfr. Proposizione 1.1).

Si ha di conseguenza che esiste un $w \in \mathrm{Q}$ tale che

$$f(x_k) = y - \lambda x_k + g(x_k) \to w$$

da cui $w = f(x)$, essendo $f$ a grafico chiuso poiché ha l'insieme risolvente non vuoto. Dunque $x$ è soluzione della (2.2).

Dimostriamo ora che l'insieme delle soluzioni della (2.2) è compatto.

L'insieme $\{x / \lambda x - g(x) - f(x) = y,\ y \in \mathrm{Q}\} = \mathrm{I}$ è relativamente compatto. Infatti, essendo $\mathrm{I} = \mathrm{R}(\lambda, f)\,\mathrm{H}$, dove $\mathrm{H} = \{z / z - g\mathrm{R}(\lambda, f) z = y,\ y \in \mathrm{Q}\}$, basta osservare che H è limitato, come segue dalla disuguaglianza

$$|z| < |y| + \|g\|_{\mathrm{B}}^{|y|} \frac{|y|}{\lambda}.$$

Inoltre l'insieme I è chiuso. Infatti sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di I convergente e sia $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. Si ha allora $g(x_n) \to g(x)$, da cui $f(x_n) = y - \lambda x_n + g(x_n) \to y - \lambda x - g(x) = f(x)$ essendo $f$ a grafico chiuso. Ne segue che $x \in \mathrm{I}$.

Si ha quindi il Corollario:

COROLLARIO 2.1. *Siano* $g, f \in \mathrm{K_L}(\mathrm{Q})$, $\mathrm{R}(\lambda, f)$ *compatta,* $g$ *continua e localmente limitata. Allora* $f + g \in \mathrm{K_L}(\mathrm{Q})$.

*Dimostrazione.* Valendo la disuguaglianza (cfr. [2], Corollario 2.1)

$$|x - \bar{x}| \leq \frac{1}{\lambda} |\lambda x - f(x) - g(x) - \lambda \bar{x} + f(\bar{x}) + g(\bar{x})|$$

$$x, \bar{x} \in \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g, \quad \lambda > 0.$$

Si ha l'unicità della soluzione della (2.2) da cui la tesi.

TEOREMA 2.2. *Siano dati* $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ *spazi di Banach,* Q *un cono convesso chiuso in* Y *con* $\dot{\mathrm{Q}}$ *non vuoto e due applicazioni* $f, g \in \mathrm{K_L}(\mathrm{Q})$ *e* $f$ *regolare.*

*Supponiamo inoltre*:

i) X *denso in* Y *e l'immersione di* X *in* Y *continua*;

ii) $Q_1 = Q \cap X \subset D_g$ *e, la restrizione di* $g$ *a* $Q_1$, $g_1 \in K_B(Q_1)$ *continua e localmente limitata in* $Q_1$;

iii) *detta* $f_1$ *la restrizione di* $f$ *al dominio* $D_{f_1} = \{x \in D_f \cap Q_1 , f(x) \in X\}$, *sia* $f_1 \in K_B(Q_1)$ *e* $R_{Q_1}(x, f_1)$ *compatta*, $\forall \lambda > 0$.

*Allora* $f + g \in K_L(Q)$.

*Dimostrazione*. Poiché l'equazione

$$\lambda x - f_1(x) - g_1(x) = y \qquad \lambda > 0 , y \in Q_1$$

è risolubile per il Teorema 2.1, si ha che $(\lambda - f_1 - g_1)(D_{f_1} \cap D_{g_1}) \supset Q_1$ è denso in Q (cfr. [4]). Ricordando che questo è condizione necessaria e sufficiente affinché $\overline{f+g} \in K_L(y)$, si ha la tesi.

Un risultato uguale a quello del Teorema 2.1 si ottiene supponendo la funzione $g$ compatta; si ha infatti il seguente

TEOREMA 2.3. *Siano* $f, g \in K_B(Q)$, $R_Q(\lambda, f)$ *compatta*, $g$ *compatta, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione* (2.1) *è compatto e non vuoto*.

*Dimostrazione*. È analoga a quella del Teorema 2.1, tenendo conto del seguente Lemma:

LEMMA 2.1. *Sia* $g \in K_B(Q)$, $g$ *compatta, allora la successione* $\{g_n(x)\}$, $x \in D_g$, *possiede una sottosuccessione* $\{g_{n_k}(x)\}$ *che converge a* $g(x)$.

*Dimostrazione*. Poiché $g$ è compatta e $\{R(n, g)\, nx\}$ è limitata, dalla successione $\{g_n(x) = g\, R(n, g)\, nx\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{g_{n_k}(x)\}$ convergente. Sia $w = \lim_{n_k \to \infty} g_{n_k}(x)$. Poiché $\lim_{n_k \to \infty} R(n_k, g)\, n_k x = x$ e $g$ ha il grafico chiuso si ha $w = g(x)$.

DEFINIZIONE. Diremo che $x$ è una soluzione debole della equazione (2.1) se esiste una successione $\{x_n\}$ in $D_f \cap D_g$ e un $x \in Q$ tali che $x_n \to x$ e $\lambda x_n - f(x_n) - g(x_n) \to y$.

Si ha allora il seguente

TEOREMA 2.4. *Date* $f, g \in K_B(Q)$, $(\lambda - f - g)(D_f \cap D_g)$ *denso in* Q, $R_Q(\lambda, f)$ *compatta*, $g$ *limitata sui limitati di* Q, *allora esiste una soluzione debole dell'equazione*

$$\lambda x - f(x) - g(x) = y \qquad \lambda > 0 , y \in Q.$$

*Dimostrazione*. Per ogni $y \in Q$, esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \in D_f \cap D_g$ tale che $y_n = \lambda x_n - f(x_n) - g(x_n) \to y$. Posto $z_n = y_n + g(x_n)$, si vede facilmente che $\{z_n\}$ è limitata, essendo la $y_n$ limitata. Si può dunque estrarre dalla $\{x_n = R(\lambda, f)\, z_n\}$ una sottosuccessione convergente. Indicato con $x$ il limite, tale $x$ è soluzione debole dell'equazione.

COROLLARIO 2.2. *Siano dati* $X \subset Y$ *spazi di Banach,* $Q$ *un cono chiuso,* $\dot{Q}$ *non vuoto in* $Y$ *e due applicazioni* $f, g \in K_B(Q)$, $R(\lambda, f)$ *compatto e* $g$ *localmente limitata e* $f$ *regolare. Supponiamo inoltre*:

i) $X$ *denso in* $Y$ *e l'immersione di* $X$ *in* $Y$ *continua*;

ii) $Q_1 = Q \cap X \subset D_g$ *e la restrizione* $g_1$ *di* $g$ *a* $Q_1$ *sia* $K_B(Q_1)$ *localmente limitata e continua in* $Q_1$;

iii) *detta* $f_1$ *la restrizione di* $f$ *al dominio* $D_{f_1} = \{x \in D_f \cap Q_1, f(x) \in X\}$, *sia* $f_1 \in K_B(Q_1)$, $R_{Q_1}(\lambda, f_1)$ *compatta,* $\forall \lambda > 0$.

*Allora esiste una soluzione debole dell'equazione* (2.1) *in* $Q$.

*Definizione.* Diremo che $x$ è una soluzione semi–debole della equazione $\lambda x - f(x) - g(x) = y$, $\lambda > 0$, $y \in Q$ se esiste una successione $\{x_n\}$ in $D_f \cap D_g$ tale che

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{e} \quad \lambda x_n - f(x_n) - g(x_n) \to y$$

(ove «$\rightharpoonup$» indica la convergenza debole in $x$).

Supponendo lo spazio $X$ riflessivo segue allora immediatamente il seguente Teorema:

TEOREMA 2.5. *Siano* $f, g \in K_B(Q)$, $f$ *regolare,* $(\lambda - f - g)(D_f \cap D_g)$ *denso in* $Q$. *Allora l'equazione* (2.7) *ha una soluzione semidebole in* $Q$.

*Dimostrazione.* Siano $y_k \in (\lambda - f - g)(D_f \cap D_g)$ tali che $y_k \to y \in Q$. Sia $x_k$ una delle soluzioni dell'equazione $\lambda x - f(x) - g(x) = y_k$. Detta $M$ una costante tale che $|y_k| \leq M$, $\forall k$, si ha per la (1.3) $|x_k| \leq \frac{M}{\lambda}$, $\forall k$. Esiste dunque una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ e un elemento $x \in Q$ tali che

$$x_{k_n} \rightharpoonup x \quad \text{e} \quad y_{k_n} \to y.$$

COROLLARIO 2.3. *Siano* $X \subset Y$ *spazi di Banach,* $Q \subset Y$ *cono convesso chiuso,* $\dot{Q}$ *non vuoto,* $X$ *denso in* $Y$ *e l'immersione di* $X$ *in* $Y$ *sia continua.*

*Siano* $f, g \in K_B(Q)$ *e* $f$ *regolare. Posto* $f_1$ *uguale alla restrizione di* $f$ *al dominio* $D_{f_1} = \{x \in D_f \cap X, f(x) \in X\}$ *supponiamo*:

i) $Q_1 = Q \cap X \subset D_g$ *e la restrizione* $g_1$ *di* $g$ *a* $Q_1$ *sia* $K_B(Q_1)$ *continua e localmente limitata in* $Q_1$;

ii) $R(\lambda, f_1)$ *compatta*;

iii) $f_1 \in K_B(Q_1)$.

*Allora l'equazione* $\lambda x - f(x) - g(x) = y$, $\lambda > 0$, $y \in Y$ *ha una soluzione semi–debole.*

*Dimostrazione.* Considerata l'equazione $\lambda x - f_1(x) - g_1(x) = y$, $\lambda > 0$, $y \in X$, essa è risolubile per il Teorema (2.1); ne segue la densità di $(\lambda - f - g)(D_f \cap D_g)$ in $Y$ e dal Teorema 2.4 la tesi.

## 3. Un esempio

Vogliamo ora dare un esempio di operatore di classe $K_B$ continuo, localmente limitato ma non uniformemente continuo sui limitati.

Definiamo la funzione $g(t)$ reale di variabile reale

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t \leq t_1 \\ t_{n+1} & \text{per} \quad t \in \left[t_n + \frac{1}{n}, t_{n+1}\right], n > 0 \\ \lambda t_n + (1 - \lambda) t_{n+1} & \text{per} \quad t \in \left[t_n, t_n + \frac{1}{n}\right], n > 0 \end{cases}$$

essendo $\{t_n\}$ la decomposizione di $R_+$ con i punti di ascissa $2^n$, $n = 1, 2, \cdots$ $g(t)$ è continua, non decrescente e $0 \leq g(t) \leq 2t$.

Definiamo l'operatore $G : L^P \to L^P$, $(Gu)(x) = -g(u(x))$.

Poiché $g$ applica $L^P$ in $L^P$ per un noto teorema [cfr. [5]], l'operatore G è continuo. Poiché $\|g\|_B \leq 2$, G è limitato sui limitati di $L^P$.

$G \in K_B$ anzi $G \in K_L$ perché $g$ è non decrescente.

G non è uniformemente continuo sui limitati di $L^P$.

Infatti considerate le funzioni appartenenti a $S(0, 2) \subset L^P$:

$$u_n(x) = \begin{cases} t_n & \text{per} \quad x \in \left(0, \frac{1}{t_n^p}\right) \\ 0 & \text{per} \quad x \in \left(\frac{1}{t_n^p}, 1\right) \end{cases}$$

$$v_n(x) = \begin{cases} t_n + \frac{1}{n} & \text{per} \quad x \in \left(0, \frac{1}{t_n^p}\right) \\ 0 & \text{per} \quad x \in \left(\frac{1}{t_n^p}, 1\right) \end{cases}$$

esse verificano la disuguaglianza $\|v_n - u_n\|_{L^P}^P < \delta$, $\delta > 0$, arbitrario, $n > \frac{1}{\delta}$. Supponiamo per assurdo che G sia uniformemente continuo su $S(0, 2)$. Preso allora $\delta = \delta_\varepsilon$ modulo di uniforme continuità, deve aversi

$$\|Gu_n - Gv_n\|_{L^P} < \varepsilon \quad \text{per} \quad n > \frac{1}{\delta_\varepsilon}$$

il che è assurdo essendo

$$\|g(v_n(x)) - g(u_n(x))\|_P^P = \int_0^{1/t_n^P} |t_{n+1} - t_n|^P \, dx = 1 \qquad \forall n.$$

## Bibliografia

[1] H. G. Crandal e A. Pazy, *Non linear semigroups of contractions and dissipative sets*, « Jour. Func. Anal. », *3*, 376–418 (1969).

[2] G. Da Prato, *Somme d'applications non-lineaires*, « Ist. Naz. alta mat., Symp. Math. », *7*, 233–268 (1971).

[3] G. Da Prato, *Somme d'applications non lineaires dans des cônes et equations d'évolutions dans des espaces d'opérateurs*, « J. Math. pures et appl. », *49*, 289–348 (1970).

[4] J. Garsoux, *Espaces vectoriels topologiques et distributions*. Dunod, Paris (1963).

[5] Krasnosel'ski, *Topological methods in the theory of non-linear integral equations*. Pergamon Press (1963).