Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Beniamino Segre

Generalizzazione di un procedimento di Levi—Civita atto a costruire soluzioni particolari di sistemi differenziali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.5, p. 295–300.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_5_295_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 26 novembre 1973

Presiede il Presidente della Classe Beniamino Segre

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Generalizzazione di un procedimento di Levi–Civita atto a costruire soluzioni particolari di sistemi differenziali.* Nota (*) del Socio Beniamino Segre.

Summary. — It is shown that m independent integrals of any given differential system of rank n in $n+1$ variables $(1 \leq m \leq n)$ define a Jacobian variety that, if not empty, is of dimension not less than and generally equal to m (n. 3); this variety is always invariant for the given differential system (n. 4).

In the case of a single integral, i.e. when $m = 1$, these results were already obtained by T. Levi–Civita [1–5]; then it may be added that any integral is necessarily constant along its Jacobian variety (n. 5).

1. Ricorre quest'anno il centenario della nascita dell'eminente Linceo Tullio Levi–Civita. L'Accademia Nazionale dei Lincei, che ha testè condotto a termine la raccolta in sei volumi delle sue immortali *Opere Matematiche* (*Memorie e Note*), celebrerà tale ricorrenza con un Convegno Internazionale che si svolgerà a Roma nei giorni 17, 18 e 19 del prossimo dicembre.

Fra le tante geniali idee risalenti al venerato Maestro ed Amico, v'è quella che conduce ad utilizzare la conoscenza di un integrale di un dato sistema differenziale di rango n in $n+1$ variabili per dedurne la costruzione di certe soluzioni particolari dello stesso sistema. Una tale soluzione si ottiene così nel caso generale in termini finiti mediante un semplice procedimento (geometrico) di eliminazione; altrimenti essa viene a dipendere da un opportuno numero ν (≥ 1) di costanti arbitrarie, la sua determinazione richiedendo allora l'integrazione di un'operazione differenziale di rango ν [1]. Questo risultato è stato dapprima ottenuto dallo stesso Levi–Civita nel caso particolare dei sistemi canonici [2] e poi anche applicato allo studio dei moti stazionari [3], con significative estensioni ai sistemi denominati pfaffiani [4];

(*) Presentata nella seduta del 26 novembre 1973.

veggasi altresì il vol. II_2 delle classiche *Lezioni di meccanica razionale* [5], Cap. X, § 4.

Nel presente lavoro l'idea suaccennata viene generalizzata applicando ad m integrali indipendenti ($1 \leq m \leq n$) un nuovo procedimento geometrico, riducentesi per $m = 1$ a quello di Levi-Civita. Facendo simultaneamente intervenire quegli m integrali, si perviene in tal guisa alla costruzione di soluzioni del dato sistema dipendenti da un certo numero ν di costanti arbitrarie, dove ora $\nu \geq m - 1$ e generalmente $\nu = m - 1$, il che esige l'integrazione di un'opportuna operazione differenziale di rango ν.

Nel caso di un solo integrale, ossia per $m = 1$, qui viene altresì mostrato che l'integrale deve sempre necessariamente conservarsi costante lungo la relativa varietà jacobiana.

Nel caso invece in cui $m > 1$, il suaccennato procedimento può naturalmente venire applicato $2^m - 1$ volte, sostituendo all'insieme degli m integrali noti un qualunque suo sottoinsieme di $1, 2, \cdots, m$ elementi. Ciò pone varie questioni, sulle quali però qui non intendo soffermarmi, relative ai legami che passano fra le diverse soluzioni del dato sistema in tal modo ottenibili, come pure concernenti l'utilizzazione del suddetto procedimento nell'ipotesi in cui – in aggiunta ad alcuni integrali – si conosca qualche relazione invariante. Del pari sorvolo sulle particolarizzazioni e sugli approfondimenti che ne derivano nel caso dei sistemi canonici o pfaffiani e su possibili applicazioni alla meccanica analitica.

2. Il più generale sistema differenziale di rango n in $n+1$ variabili x^i ($i = 0, 1, \cdots, n$) può venir scritto sotto la forma consueta

$$\frac{dx^0}{X^0} = \frac{dx^1}{X^1} = \cdots = \frac{dx^n}{X^n}, \tag{1}$$

nella quale le X designano funzioni non tutte nulle delle x, regolari in un certo campo C dello spazio (ad $n+1$ dimensioni) di queste variabili. Un integrale

$$f(x^0, x^1, \cdots, x^n) = \text{cost.}$$

del sistema (1), non è notoriamente che una soluzione (non identicamente uguale ad una costante) dell'equazione a derivate parziali

$$X^0 \frac{\partial f}{\partial x^0} + X^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \cdots + X^n \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0. \tag{2}$$

Ammettiamo di conoscere m integrali ($1 \leq m \leq n$) del sistema (1):

$$f_1, \; f_2, \; \cdots, \; f_m, \tag{3}$$

e cioè m soluzioni della (2), e supponiamo ch'essi siano *indipendenti*, onde in C i determinati jacobiani

$$J_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_m)}{\partial(x^{i_1}, x^{i_2}, \cdots, x^{i_m})} \tag{4}$$

non saranno tutti identicamente nulli.

Al variare delle costanti $c_1, c_2, \cdots, c_m$, le

$$f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2, \quad \cdots, \quad f_m = c_m \tag{5}$$

definiscono allora ∞^m *varietà invarianti* per il sistema (1), e di queste ne passa una ed una sola per ogni punto di C. La generica varietà (5) ha la dimensione $n - m + 1$, e su essa – se $m < n$ – il sistema (1) subordina un analogo sistema differenziale (1'), di rango $n - m$ in $n - m + 1$ variabili [coordinate « interne » sulla (5)], le cui soluzioni sono pure – nello spazio ambiente delle x – curve integrali del sistema (1). L'integrazione di (1') fornisce dunque sulla varietà (5) ∞^{n-m} curve integrali del sistema (1), delle quali ne passa una ed una sola per ogni punto semplice (o di regolarità) di tale varietà; al variare delle c, ciò porge in complesso ∞^n curve e quindi tutte le curve integrali del sistema (1), a prescindere soltanto da quelle che eventualmente giacessero sulla varietà luogo dei punti singolari delle (5), e cioè sulla *varietà* V *jacobiana* delle (3).

Passiamo ora ad occuparci di queste ultime curve.

3. La varietà V, testè considerata, vien definita in C dalle equazioni:

$$J_{i_1 i_2 \cdots i_m} = 0 \qquad (i_1, i_2, \cdots, i_m = 0, 1, \cdots, n), \tag{6}$$

fra le quali – come vedremo – ve ne sono *al più* $n - m + 1$ *di indipendenti*. È quindi lecito supporre che le (6) risultino compatibili in C, e cioè che V non sia vuota, ed inoltre che V risulti regolare in un'opportuna porzione C^* di C; la dimensione $\nu + 1$ di V soddisferà conseguentemente alla

$$\nu + 1 \geq m, \tag{7}$$

dove « in generale » dovrà assumersi il segno di uguaglianza.

Denotiamo con J la matrice jacobiana (ad m righe ed $n + 1$ colonne) delle f rispetto alle x. Poiché per ipotesi (n. 2) le (6) non sono tutte identicamente soddisfatte in C, così è certamente possibile scegliere per gli indici $(i_1, i_2, \cdots, i_{m-1})$ $m - 1$ distinti fra gli interi $0, 1, \cdots, n$, in guisa che la matrice J^* formata dalle colonne della J aventi tali indici $i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}$ abbia in C^* la caratteristica $m - 1$. Denotiamo genericamente con i^* uno degli $(n + 1) - (m - 1) = n - m + 2$ valori $i = 0, 1, \cdots, n$ distinti da $i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}$; siccome ciascuna delle (3) soddisfa alla (2), dall'ipotesi fatta su J^* discende che in nessun punto della suddetta porzione di C le X^{i^*} possono annullarsi tutte identicamente, in quanto altrimenti in un punto in cui così non fosse ciascuna delle $X^0, X^1, \cdots, X^n$ dovrebbe annullarsi, contrariamente a quanto supposto nel n. 2.

D'altro canto, in un punto di tale porzione di C, le cui coordinate non annullano tutti i minori d'ordine $m - 1$ della matrice J^*, le $\binom{n+1}{m}$ equazioni (6) sono notoriamente conseguenze delle $n - m + 2$ equazioni che da esse si ottengono fissando per $i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}$ i valori dianzi indicati e dando ad i_m i suddetti valori i^*. Però, attualmente, quelle $n - m + 2$ equazioni discendono già da $n - m + 1$ opportunamente scelte fra esse, in virtù di quanto dianzi osservato sulle X^{i^*} e dell'identità

$$\sum_{i_m=0}^{n} X^{i_m} J_{i_1 i_2 \cdots i_m} = 0 ,$$

che subito si trae dalle (4) e dal fatto che per ipotesi ognuna delle (3) soddisfa alla (2): ed invero, per ottenere quest'identità, basta in ciascun addendo portare il primo fattore a moltiplicare la m^{ma} colonna del determinante figurante come secondo fattore e poi sommare rispetto a tale colonna.

La varietà V, nell'intorno del suo punto generico, può quindi venire rappresentata come asserito mediante al più $n - m + 1$ equazioni, ed ha dunque una dimensione $\nu + 1$ soddisfacente alla (7).

4. Dimostriamo infine che:

In ogni caso, la suddetta varietà jacobiana V *risulta* *i n v a r i a n t e* *per il sistema differenziale* (1).

Ciò val quanto asserire che, in forza delle equazioni (6) della V, per i singoli primi membri $J_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ di tali equazioni sussiste la

$$\sum_{i=0}^{n} X^i \frac{\partial J_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{\partial x^i} = 0 . \tag{8}$$

Allo scopo di dimostrarlo incominciamo coll'osservare che, per ottenere la derivata rispetto ad x^i – che figura nella (8) – del determinante (4), basta derivare la h^{ma} colonna di questo determinante e poi sommare gli m determinanti così definiti per $h = 1, 2, \cdots, m$. Moltiplicando per X^i la h^{ma} colonna dell'h^{mo} determinante e poi sommando rispetto a tale colonna ed invertendo le due sommatorie, si vede che il primo membro della (8) vale precisamente:

$$\sum_{h=1}^{m} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x^{i_1}} , \cdots , \frac{\partial f_j}{\partial x^{i_{h-1}}} , \sum_{i=0}^{n} X^i \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^i \partial x^{i_h}} , \frac{\partial f_j}{\partial x^{i_{h+1}}} , \cdots , \frac{\partial f_j}{\partial x^{i_m}} \right) , \tag{9}$$

dove l'espressione entro parentesi sta per indicare il determinante formato dalle righe che da essa risultano dando a j i valori $1, 2, \cdots, m$.

Se ora deriviamo rispetto ad x^{i_h} i due membri dell'equazione esprimente che f_j soddisfa alla (2), otteniamo l'identità

$$\sum_{i=0}^{n} X^i \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^i \partial x^{i_h}} = - \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^{i_h}} \frac{\partial f_j}{\partial x^i} .$$

Dunque, avuto riguardo alle (4), la (9) appare identicamente uguale a

$$- \sum_{h=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^{i_h}} J_{i_1 \cdots i_{h-1}\, i\, i_{h+1} \cdots i_m} ,$$

epperciò si annulla di fatto in conseguenza delle (6).

La proprietà d'invarianza della V, così stabilita, mostra che – su di una porzione regolare della V, di dimensione $\nu + 1$ verificante la (7) – il sistema differenziale (1) induce un sistema differenziale di rango ν in $\nu + 1$ variabili (coordinate «interne» del punto variabile in tale porzione) le cui curve integrali vengono a soddisfare nello spazio ambiente alle (1). Si giunge pertanto a delle *soluzioni particolari* del sistema (1), dipendenti da ν costanti arbitrarie e di tipo generalmente diverso da quello delle ∞^n soluzioni considerate nel n. 2, mediante integrazione del suddetto sistema differenziale di rango ν. Per il modo come sono state ottenute, quelle ∞^ν soluzioni particolari vengono ad avere *carattere stazionario* rispetto alle altre ∞^n.

5. Nel caso $m = 1$, originariamente considerato da Levi-Civita, la varietà (5) viene ad essere definita da una sola equazione:

$$f = c, \tag{10}$$

la quale – nello spazio delle x ed al variare della costante c – rappresenta un'*ipersuperficie descrivente un fascio*. Attualmente, da ciò ch'è stato detto nel n. 3 circa la (7), discende che la *varietà jacobiana* V di tale fascio ha dimensione $(\nu + 1 \geq 1)$ generalmente uguale ad 1. Quando quest'ultima eventualità si presenta, ossia se $\nu = 0$, la V è una *curva*, espressa in termini finiti dalle (6) che ora si riducono alle

$$\frac{\partial f}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x^1} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0; \tag{11}$$

a norma del n. 4, tale curva risulta invariante per il sistema differenziale (1), e cioè – come già ottenuto da Levi-Civita – essa costituisce una *soluzione* di questo sistema.

Qualunque sia ν, dalla precedente impostazione geometrica agevolmente si trae – come vedremo – il seguente risultato complementare, d'altronde evidente per $\nu = 0$ in base a quanto sopra.

Quando ci si riferisce ad un solo integrale (10) *del sistema differenziale* (1), *l'equazione* (10) *risulta identicamente soddisfatta lungo la varietà jacobiana* (11), *in corrispondenza ad un opportuno valore della costante c.*

Invero, qualora così non fosse, al variare della c l'ipersuperficie descrivente il fascio (10) sarebbe dotata di qualche *punto singolare variabile* (sulla V). A norma di una nota estensione di un classico teorema di Bertini (per la quale ved. ad esempio [6], n. 41), un punto siffatto dovrebbe essere comune a tutte le ipersuperficie del suddetto fascio (10). Ma ciò è assurdo, in quanto tale fascio non ammette punti base (a distanza finita); e questa contraddizione dimostra l'asserto.

È da ritenersi che il risultato testè stabilito non possa venire esteso, se non in casi particolari, alla jacobiana di $m > 1$ integrali indipendenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. LEVI-CIVITA, *Sulla ricerca di soluzioni particolari dei sistemi differenziali*, « Rend. Acc. Lincei », (5) *14*, 203–209 (1905)$_1$; *Opere Matematiche*, vol. II, 441–448.

[2] T. LEVI-CIVITA, *Sulla determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante*, « Rend. Acc. Lincei », (5) *10*, 3–9 e 35–41 (1901)$_1$; *Opere Matematiche*, vol. II, 87–100.

[3] T. LEVI-CIVITA, *Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires*, « Prac matematyczno-fizycznych », *17*, 1–40 (1906); *Opere Matematiche*, vol. II, 465–502.

[4] T. LEVI-CIVITA, *Sulle soluzioni stazionarie dei sistemi pfaffiani*, « Rend. Acc. Lincei », (6) *19*, 261–267 e 369–375 (1934)$_1$; *Opere Matematiche*, vol. V, 463–477.

[5] T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II$_2$ (Bologna, Zanichelli, nuova ediz., 1952).

[6] B. SEGRE, *Prodromi di geometria algebrica, con un'Appendice di U. Bartocci e M. Lorenzani* (Roma, Cremonese, 1972).