ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MAURO FABRIZIO

Convessità dei potenziali termodinamici nell'elettromagnetismo ereditario

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.3-4, p. 241–248.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_3-4_241_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Fisica matematica. — *Convessità dei potenziali termodinamici nell'elettromagnetismo ereditario* (**). Nota (*) di MAURO FABRIZIO, presentata dal Socio D. GRAFFI.

RÉSUMÉ. — On énonce un principe de convexité pour l'énergie électromagnétique relative à des matériaux à mémoire. Cette propriété permet d'énoncer d'une façon correcte le problème de Cauchy pour les équations de Maxwell.

INTRODUZIONE

Nella teoria dell'elettromagnetismo macroscopico un materiale è descritto fenomenologicamente dalle cosiddette *equazioni costitutive*. Cioè da funzioni che legano variabili fisiche, come il vettore spostamento elettrico al valore di altre grandezze, come la temperatura e il vettore campo elettrico. Le caratteristiche del mezzo sono pertanto espresse dalla particolare struttura delle relazioni costitutive, ad esempio il mezzo è non lineare se la funzione costitutiva è non lineare, si può così caratterizzare nel materiale la sua struttura omogenea, non omogenea, dispersiva, non dispersiva, ecc.

Inoltre, seguendo la recente letteratura [1], chiameremo *bianisotropo* un materiale in cui i vettori **D** , **B** sono funzioni sia del campo elettrico **E** che del campo magnetico **H**.

Nella prima parte di questo lavoro, dopo avere stabilito le ipotesi dei processi elettromagnetici e dei materiali che considereremo (isotermici, ereditari, bianisotropi, ecc.) mi sono soffermato brevemente sulle condizioni di regolarità per i funzionali costitutivi ed ho precisato lo spazio comune di definizione. Sotto queste ipotesi è possibile, come è ben noto [2], [3], [4], stabilire delle restrizioni di natura termodinamica; confrontando tali risultati con alcune affermazioni di Kong [1] ho potuto stabilire che un mezzo lineare non assorbente, non può risultare bianisotropo.

Mi sono occupato quindi di formulare un *principio di convessità* per l'energia interna nel caso di materiali ereditari, che risulta una necessaria e interessante estensione dei principi di convessità formulati per i materiali senza memoria.

Infatti ho dimostrato che da tale principio discende la condizione di iperbolicità per il sistema delle equazioni di moto. In altre parole cioè, con un principio termodinamico si caratterizza la natura delle onde (*iperbolicità*), che reggono la propagazione del mezzo.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca per la Matematica del C.N.R.
(**) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1973.

Questa Nota è la prima di una mia ricerca sull'elettromagnetismo ereditario. Di tale studio fanno parte altre due Note di prossima pubblicazione negli Atti di questa Accademia in cui vengono studiati problemi connessi alla esistenza di relazioni di dualità e reciprocità per una vasta classe di materiali con memoria, non lineari.

1. Campi ed equazioni costitutive

Poiché studieremo fenomeni elettromagnetici in un mezzo $\mathcal{B}$ non in moto delimitato da un dominio Ω dello spazio euclideo (tridimensionale) R^3, identificheremo ciascun punto materiale $\mathbf{X}$ di $\mathcal{B}$ con il corrispondente punto geometrico $x = (x^1, x^2, x^3)$ di R^3; inoltre sia $I = \{t : t \in (0, T)\}$ un intervallo della variabile temporale t. Un *processo elettromagnetico* è costituito dall'insieme di otto funzioni definite per $(x, t) \in Q \overset{\text{def.}}{=} \Omega \times I$.

Tali funzioni sono i vettori: *campo elettrico* $\mathbf{E}$, *spostamento elettrico* $\mathbf{D}$, *campo magnetico* $\mathbf{H}$, *induzione magnetica* $\mathbf{B}$, *corrente elettrica* $\mathbf{J}$, *corrente magnetica* $\mathbf{I}$, *flusso di calore* $\boldsymbol{q}$ e lo scalare *densità di energia interna* ε.

I vettori corrente elettrica $\mathbf{J}$ e corrente magnetica $\mathbf{I}$ li supporremo noti in Q.

Un tale processo lo chiameremo *stato elettromagnetico* se e solo se è compatibile con le leggi di Faraday, di Ampère e di conservazione dell'energia che per campi sufficientemente regolari si possono esprimere:

$$\dot{\mathbf{D}} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J} \tag{1,1}$$

$$\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{I} \tag{1,2}$$

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \boldsymbol{q}) \tag{1,3}$$

dove il punto come soprassegno indica la derivata rispetto al tempo.

Da tali equazioni, ricordando il teorema di Poynting e dopo semplici passaggi, abbiamo:

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{I}. \tag{1,4}$$

Inoltre se indichiamo con ψ la densità di *entalpia definita* (1):

$$\psi \overset{\text{def.}}{=} \varepsilon - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \tag{1,5}$$

allora l'equazione (1,4) che esprime il principio di conservazione dell'energia si può formulare:

$$\dot{\psi} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} - \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{I}. \tag{1,6}$$

(1) Spesso l'entalpia risulta definita con segno opposto a quello scelto in questo lavoro.

Nella teoria dei materiali con *memoria* od *ereditari*, un mezzo è caratterizzato da equazioni funzionali, che legano le grandezze che caratterizzano il processo, del tipo:

$$f(x,t) = \tilde{f}(\gamma^t(x))$$

dove $\gamma^t(x)$ è una funzione da $[0,\infty)$ ad un insieme di dimensione finita, definita:

$$\gamma^t(x,s) = \gamma(x;t-s)$$

che si è soliti chiamare *storia* di γ al tempo t.

I processi, a cui limiteremo la nostra ricerca, li supporemo isotermici. Mentre i materiali che tratteremo sono caratterizzati in ciascun punto $x \in \Omega$ dall'insieme delle quattro funzioni $\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\boldsymbol{q}}$, chiamate equazioni costitutive, che determinano al tempo t il valore di $\psi, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \boldsymbol{q}$, come funzione delle storie del campo elettrico $\mathbf{E}^t$ e del campo magnetico $\mathbf{H}^t$ relative al punto x.

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \tilde{\psi}(\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t) \\ \mathbf{D}(t) &= \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t) \\ \mathbf{B}(t) &= \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t) \\ \boldsymbol{q}(t) &= \tilde{\boldsymbol{q}}(\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t). \end{aligned} \tag{1,7}$$

L'insieme delle quattro funzioni $\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\boldsymbol{q}}$ lo chiameremo un *campo elettromagnetico* in Q, se è compatibile sia con le equazioni (1,1), (1,2), (1,3), sia con le relazioni costitutive (1,7).

Inoltre un campo elettromagnetico deve verificare il secondo principio della termodinamica che è espresso in maniera precisa dalla disuguaglianza di Clausius-Duhem (cfr. [5], capitolo E).

Tale disuguaglianza come noto [2], [3], [4] impone delle restrizioni sui funzionali costitutivi (1,7). La natura di tali restrizioni dipende dalle proprietà del dominio e dalle ipotesi di regolarità dei funzionali costitutivi.

Per tale ragione e come conseguenza degli sviluppi della presente Nota, supporremo che l'insieme di definizione dei funzionali $\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\boldsymbol{q}}$ sia costituito da uno spazio di Hilbert $\mathfrak{H}$ del tipo usato da Coleman e Noll nella teoria della *Fading Memory* [6].

Lo spazio $\mathfrak{H}$ è pertanto formato dall'insieme delle funzioni da $[0,\infty)$ a $R^3 \oplus R^3$ cioè dalle coppie $u^t = (\mathbf{E}^t, \mathbf{H}^t)$ per cui la norma

$$\|u^t\| \overset{\text{def.}}{=} \left(|u^t(0)|^2 + \int_0^\infty |u^t(s)|^2 k(s)\, ds\right)^{1/2} \tag{1,8}$$

è finita, dove $k(s)$ è una funzione nota, positiva, decrescente e sommabile in $(0,\infty)$.

2. Ipotesi di regolarità e restrizioni sui funzionali costitutivi

Per ogni materiale esiste uno spazio delle storie $\mathfrak{H}$ che verifica le condizioni seguenti:

a) i funzionali $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\boldsymbol{q}}$, *sono definiti e continui nello spazio di Hilbert* $\mathfrak{H}$,

b) i funzionali $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, *sono differenziabili secondo Fréchet con continuità su* $\mathfrak{H}$.

Osserviamo che per l'ipotesi *a)* è possibile, in virtù delle proprietà della norma (1,8), caratterizzare nei funzionali $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\boldsymbol{q}}$ la dipendenza nella storia separando i contributi relativi alla restrizione della storia a $(0, \infty)$ e all'istante attuale, nel senso che se indichiamo con $\tilde{f}$ uno qualunque dei funzionali considerati in (1,7), allora per $\varphi \in \mathfrak{H}$, $\tilde{f}(\varphi)$ può essere scritta [7]:

$$\tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\varphi(0)\,;\varphi_r) \tag{2,1}$$

dove $\varphi(0)$ è il valore attuale di φ e φ_r è la restrizione di φ a $(0, \infty)$ che chiameremo *storia passata.* L'insieme di tali funzioni verrà indicato con $\mathfrak{H}_r$ e risulta come $\mathfrak{H}$ uno spazio di Hilbert la cui norma:

$$\|u^t\|_r^2 \overset{\text{def.}}{=} \int_0^\infty |u^t(s)|^2 \, k(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

L'ipotesi di differenziabilità per $\tilde{f}$ comporta l'esistenza per ogni $\varphi \in \mathfrak{H}$ della *derivata istantanea* $\partial_\varphi \tilde{f}(\varphi)$ e del differenziale $\delta_r \tilde{f}(\varphi\,|\,\cdot)$ definiti

$$\tilde{f}(\varphi(0) + \psi(0)\,;\varphi_r) = \tilde{f}(\varphi(0)\,;\varphi_r) + \partial_\varphi \tilde{f}\cdot\psi(0) + o(|\psi(0)|) \tag{2,2}$$

$$\tilde{f}(\varphi(0)\,;\varphi_r + \psi_r) = \tilde{f}(\varphi(0)\,;\varphi_r) + \delta_r \tilde{f}(\varphi\,|\,\psi_r) + o(\|\psi_r\|_r) \tag{2,3}$$

per tutti i $\psi \in \mathfrak{H}$, tali che $\varphi + \psi \in \mathfrak{H}$ e dove $\delta_r \tilde{f}(\varphi\,|\,\psi_r)$ è lineare in ψ_r.

In particolare, sempre nel campo di validità delle condizioni *a)*, *b)* si prova l'esistenza degli operatori differenziali $\partial_{\mathbf{E}}$, $\partial_{\mathbf{H}}$ che, nel caso $\tilde{f} = \tilde{\psi}$ risultano definiti [(2)].

$$\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\psi}(u^t)\cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial \nu}\tilde{\psi}(u_r^t\,;\mathbf{E} + \nu \boldsymbol{v}\,,\mathbf{H})\big|_{\nu=0} \tag{2,4}$$

$$\partial_{\mathbf{H}} \tilde{\psi}(u^t)\cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial \nu}\tilde{\psi}(u_r^t\,;\mathbf{E}\,,\mathbf{H} + \nu \boldsymbol{v}\big|_{\nu=0} \tag{2,5}$$

per ogni $u^t \in \mathfrak{H}$, $\boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^3$.

Le derivate istantanee $\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\psi}$, $\partial_{\mathbf{H}} \tilde{\psi}$ risultano dei funzionali a valori vettoriali. Naturalmente gli operatori $\partial_{\mathbf{E}}$, $\partial_{\mathbf{H}}$ possono essere applicati non sol-

(2) Vedi Coleman [8].

tanto a $\tilde{\psi}$, ma anche a $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$. Infatti, possiamo considerare i funzionali a valori tensoriali $\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{D}}$, $\partial_{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{D}}$:

$$\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{D}} (u^t) \, \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\mathbf{D}} (u_r^t \, ; \mathbf{E} + \nu \boldsymbol{v} \, , \mathbf{H}) |_{\nu=0} \tag{2,6}$$

$$\partial_{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{D}} (u^t) \, \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\mathbf{D}} (u_r^t \, ; \mathbf{E} \, , \mathbf{H} + \nu \boldsymbol{v}) |_{\nu=0} \, . \tag{2,7}$$

Con le condizioni termodinamiche proposte da Coleman [8] riprese in [2], [3], [4] è possibile pervenire fra l'altro alla seguente affermazione:

TEOREMA 1. *Nelle ipotesi di regolarità a), b) per i funzionali costitutivi* $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\boldsymbol{q}}$ *risulta come conseguenza del principio di dissipazione di Clausius–Duhem che*:

i) *il flusso di calore deve essere identicamente nullo, cioè*:

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(u^t) \equiv 0 \, . \tag{2,8}$$

ii) $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ *sono determinati da* $\tilde{\psi}$ *mediante le relazioni*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} &= \partial_{\mathbf{E}} \tilde{\psi} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \partial_{\mathbf{H}} \tilde{\psi} \end{aligned} \tag{2,9}$$

valide su tutto $\mathfrak{H}$.

Poiché abbiamo supposto $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ differenziabili secondo Fréchet su $\mathfrak{H}$, come conseguenza di (2,9) devono esistere le derivate seconde di $\tilde{\psi}$ e verificare certe relazioni di simmetria che consentono di formulare il seguente corollario [2]:

COROLLARIO. *Il principio di dissipazione sotto le ipotesi per i funzionali costitutivi a), b) comporta*:

i) *su tutto* $\mathfrak{H}$ *vale la relazione*:

$$\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{B}} = \partial_{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{D}} \tag{2,10}$$

ii) *i tensori* $\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{D}}$, $\partial_{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{B}}$ *risultano simmetrici.*

Per mezzi lineari bianisotropi non assorbenti e quindi non ereditari Kong [1] osserva che nel campo di validità del teorema di Poynting complesso deve risultare:

$$\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{B}} = - \partial_{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{D}} . \tag{2,11}$$

Pertanto, in queste ipotesi e ricordando che stiamo studiando fenomeni relativi a mezzi non in moto, come conseguenza di (2,10), (2,11) dovrà essere:

$$\partial_{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{B}} = \partial_{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{D}} = 0 \, . \tag{2,12}$$

OSSERVAZIONE. *Un mezzo non assorbente lineare e non in moto non può risultare bianisotropo, in quanto per* (2,12) $\tilde{\mathbf{B}}$ *non può dipendere da* $\mathbf{E}$ *e* $\tilde{\mathbf{D}}$ *da* $\mathbf{H}$.

3. Sul principio di convessità per i potenziali termodinamici dei materiali con memoria

È noto come alcuni potenziali termodinamici, fra cui l'energia interna o l'energia libera nel caso di materiali non ereditari, si suppongono funzioni *convesse* delle variabili termomeccaniche indipendenti ([9], [10]).

Tale condizione di convessità oltre che costituire una ipotesi caratterizzante di ogni teoria termodinamica comporta notevoli restrizioni sui funzionali costitutivi e consente, nello studio sulle equazioni alle derivate parziali del primo ordine di stabilire che i sistemi differenziali quasi-lineari di tipo conservativo risultano *simmetrici iperbolici* secondo la definizione di Friedrichs [11].

Nella termodinamica dei materiali con memoria, sviluppata ampiamente da Coleman [8], non si è, a tutt'oggi, pervenuti ad una opportuna estensione della condizione di convessità.

In verità poiché tale esigenza si è più volte sentita, come detto nello studio sulle equazioni alle derivate parziali, l'ipotesi di convessità è stata imposta senza tuttavia giustificarla come conseguenza di un principio fisico [12].

Enunceremo ora il principio di convessità per l'entalpia ψ definita in (1,5), tale risultato è equivalente alla condizione di convessità, per l'energia interna, in quanto la trasformazione con cui si passa da ε a ψ, per le condizioni (2,9) è di Legendre.

Principio di convessità. *L'entalpia $\tilde{\psi}$ per materiali con memoria del tipo* (1,7) *verificante le ipotesi a*), *b*) *risulta una funzione strettamente convessa dei valori istantanei delle variabili indipendenti, nel senso che*:

$$\partial_{\mathbf{E}}\,\partial_{\mathbf{E}}\,\tilde{\psi}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 2\,\partial_{\mathbf{E}}\,\partial_{\mathbf{H}}\,\tilde{\psi}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \partial_{\mathbf{H}}\,\partial_{\mathbf{H}}\,\tilde{\psi}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} > 0 \tag{3,1}$$

per ogni $\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^3$ *e non nulli*.

Per quanto segue è conveniente fare le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} u &= (\mathbf{E}\,,\,\mathbf{H}) \\ \mathrm{F} &= (\mathbf{D}\,,\,\mathbf{B}) \\ \tilde{\mathrm{F}} &= (\tilde{\mathbf{D}}\,,\,\tilde{\mathbf{B}}) \\ \rho &= (-\mathbf{J}\,,\,\mathbf{I})\,. \end{aligned} \tag{3,2}$$

Mediante tale nuovo simbolismo le relazioni (2,9) si possono formulare

$$\tilde{\mathrm{F}} = \partial_u\,\tilde{\psi} \tag{3,3}$$

mentre il principio di convessità

$$(\partial_u\,\partial_u\,\tilde{\psi}\xi\,,\,\xi) > 0 \tag{3,4}$$

dove abbiamo indicato con ξ un arbitrario elemento di R^6 non nullo e con $(\cdot\,,\cdot)$ il prodotto scalare in questo spazio.

Inoltre le equazioni (1,1), (1,2) si esprimono in maniera più concisa:

$$\partial \tilde{\mathrm{F}} / \partial t = \Lambda^i \, \partial u / \partial x_i + \rho \tag{3,5}$$

dove Λ^i $(i = 1, 2, 3)$ sono matrici 6×6 simmetriche [13].

Poiché abbiamo supposto $\tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}$ e quindi anche $\tilde{\mathrm{F}}$ differenziabili secondo Fréchet in $\mathfrak{H}$, dovrà risultare per ogni $\varphi, \xi \in \mathfrak{H}$:

$$\tilde{\mathrm{F}}(\varphi + \xi) = \tilde{\mathrm{F}}(\varphi) + \delta \tilde{\mathrm{F}}(\varphi \mid \xi) + o(\| \xi \|) \tag{3,6}$$

dove $\delta \tilde{\mathrm{F}}(\cdot \mid \cdot)$, chiamata derivata di Fréchet, è definita e continua in $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ e è tale che $\delta \tilde{\mathrm{F}}(\varphi \mid \xi)$ è una funzione lineare di ξ per ogni φ.

Con le considerazioni esposte da Coleman e Mizel [14] è possibile quindi affermare:

PROPOSIZIONE 1. *Nelle ipotesi di differenziabilità secondo Fréchet della funzione* $\tilde{\mathrm{F}}$ *su* $\mathfrak{H}$ *e per ogni storia sufficientemente regolare* $\varphi \in \mathfrak{H}$, *per cui* $\dot{\varphi} \in \mathfrak{H}$, *la derivata temporale* $\dot{\tilde{\mathfrak{F}}} \stackrel{\text{def.}}{=} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \tilde{\mathrm{F}}(\varphi(s))|_{s=0}$ *esiste ed è espressa da*:

$$\dot{\tilde{\mathfrak{F}}} = \delta \tilde{\mathfrak{F}}(\varphi \mid \dot{\varphi}) \tag{3,7}$$

essendo $\dot{\varphi}$ *definita*: $\dot{\varphi} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \varphi(s)$.

Ora poiché, come facilmente si dimostra confrontando (2,2), (2,3) con (3,6), i funzionali $\partial_u \tilde{\mathrm{F}}$ e $\delta_r \tilde{\mathrm{F}}$ determinano $\delta \tilde{\mathrm{F}}$ mediante la relazione:

$$\delta \tilde{\mathrm{F}}(\varphi \mid \psi) = \partial_\varphi \tilde{\mathrm{F}}(\varphi) \, \psi(0) + \delta_r \tilde{\mathrm{F}}(\varphi \mid \psi_r). \tag{3,8}$$

Quindi

PROPOSIZIONE 2. *Per ogni* $\varphi, \dot{\varphi} \in \mathfrak{H}$ *la derivata temporale* $\dot{\mathrm{F}}$ *si può esprimere mediante* $\partial_u \tilde{\mathrm{F}}$ e $\delta_r \tilde{\mathrm{F}}$ *nel modo seguente*:

$$\dot{\mathrm{F}} = \partial_\varphi \tilde{\mathrm{F}}(\varphi) \, \dot{\varphi}(0) + \delta_r \tilde{\mathrm{F}}(\varphi \mid \dot{\varphi}_r) \tag{3,9}$$

con $\dot{\varphi}(0) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \varphi(s)|_{s=0}$.

Infine poiché $\delta_r \tilde{\mathrm{F}}(\varphi \mid \dot{\varphi}_r)$, come osservato, risulta lineare e continuo in $\varphi_r \in \mathfrak{H}_r$, per il teorema di Riesz deve esistere una funzione $\tilde{\mathrm{B}}(\varphi)$ a valori tensoriali per cui:

$$\delta_r \tilde{\mathrm{F}}(\varphi \mid \dot{\varphi}_r) = \int_0^\infty \tilde{\mathrm{B}}(\varphi ; s) \, \dot{\varphi}(s) \, \mathrm{d}s. \tag{3,10}$$

Pertanto osservando che $\dot{u}^t(0) = \frac{\partial u}{\partial t}$ e ricordando (3,3), (3,9), il sistema (3,5) si formula:

$$\partial_u \partial_u \tilde{\psi} \, \partial u / \partial t = \Lambda^i \, \partial u / \partial x_i - \int_0^\infty \tilde{\mathrm{B}}(u^t ; s) \frac{\partial u^t}{\partial s} \, \mathrm{d}s + \rho. \tag{3,11}$$

Poiché, sia $\partial_u \partial_u \tilde{\psi}$ che Λ^i $(i = 1, 2, 3)$ sono matrici simmetriche e inoltre come conseguenza del principio di convessità $\partial_u \partial_u \psi$ è definita positiva, il sistema (3,11) risulta simmetrico iperbolico. L'importanza di tale risultato si comprende dal confronto coi sistemi lineari. Per essi la possibilità di una formulazione mediante sistemi simmetrici iperbolici, garantisce (vedi Lax [15], Godunov [10]) che il problema di Cauchy risulta ben posto, cioè il valore di ogni sua soluzione su una superficie $t =$ cost può essere assegnato mediante arbitrarie funzioni regolari di x.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. A. KONG, « Proc. IEEE », *60*, 1036–1046 (1972).
[2] B. D. COLEMAN e E. H. DILL, « Zeit. Angew. Math. Phys. », *22*, 691–702 (1971).
[3] B. D. COLEMAN e E. H. DILL, « Arch. Rational Mech. Anal. », *41*, 132–162 (1971).
[4] M. FABRIZIO, « Boll. U.M.I. », *4* (4), 705–719 (1971).
[5] C. TRUESDELL e R. A. TOUPIN, *The non-linear field theory of mechanics*, « Encyclopedia of Physics », *3* (3), ed. da S. Flügge Springer–Verlag, Berlin–New York 1960.
[6] B. D. COLEMAN e W. NOLL, « Reviews Mod. Physics », *33*, 239–249 (1961).
[7] B. D. COLEMAN e V. J. MIZEL, « Arch. Rational Mech. Anal. », *23*, 87–123 (1966).
[8] B. D. COLEMAN, « Arch. Rational Mech. Anal. », 17, 1–46 (1964).
[9] P. GERMAIN, *Cours de mecanique des milieux continus*, Masson, Paris 1973.
[10] S. K. GODUNOV, « Russian Math. Surveys », *17*, 145–156 (1962).
[11] K. O. FRIEDRICHS, « Comm. Pure Appl. Math. », *7*, 345–493 (1954).
[12] M. FABRIZIO, « Atti Acc. Naz. dei Lincei », *49*, 102–109 (1970).
[13] A. R. MITCHELL, *Computational method in partial differential equations*, John Wiley e Sons, London 1969.
[14] B. D. COLEMAN e U. J. MIZEL, « Arch. Rational Mech. Anal. », *29*, 18–31 (1968).
[15] P. D. LAX, « Proc. Nat. Acad. Sci. USA », *68*, 1686–1688 (1971).