Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vincenzo Dicuonzo

Le reti di simmetrie delle quadriche come modelli dei piani metrici finiti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.3-4, p. 202–206.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_3-4_202_0>

Geometria. — *Le reti di simmetrie delle quadriche come modelli dei piani metrici finiti* [(*)]. Nota [(**)] di VINCENZO DICUONZO, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — The purpose of this paper is to represent the metric planes, over a field of characteristic > 2, by bundles of symmetries of the quadrics and their transformations.

I. RAPPRESENTAZIONE DEL PIANO METRICO FINITO DI TIPO IPERBOLICO

Sia $S(3, q)$ *uno spazio proiettivo di dimensione* 3 *su un campo di caratteristica* > 2, *di ordine* $q = p^h$, dove p è un numero primo > 2 e h è un intero positivo. Siano inoltre $\mathfrak{Q}$ *una quadrica di* $S(3, q)$ *a punti ellittici o iperbolici* e Φ *la polarità definita da* $\mathfrak{Q}$.

Si chiama *simmetria di* $\mathfrak{Q}$ la restrizione a $\mathfrak{Q}$ di una omologia armonica di $S(3, q)$ permutabile con Φ. Se λ è una simmetria di $\mathfrak{Q}$, indichiamo con $\mathfrak{K}_\lambda$ l'insieme delle simmetrie di $\mathfrak{Q}$ permutabili con λ. Poiché ad ogni simmetria di $\mathfrak{Q}$ è associato un piano segante $\mathfrak{Q}$ e due simmetrie permutabili di $\mathfrak{Q}$ hanno i piani associati coniugati in Φ, si ha che gli elementi di $\mathfrak{K}_\lambda$ sono q^2. Indichiamo con $\mathfrak{L}$ la conica di $\mathfrak{Q}$ luogo dei punti uniti di λ e con ω il piano di $\mathfrak{L}$. Si noti che la restrizione ad $\mathfrak{L}$ di un elemento di $\mathfrak{K}_\lambda$ è una involuzione. Gli *elementi di* $\mathfrak{K}_\lambda$ vengono distinti in *iperbolici* o *ellittici*, secondo che sia iperbolica o ellittica l'involuzione corrispondente su $\mathfrak{L}$.

Dati due elementi a e b di $\mathfrak{K}_\lambda$, si chiama *fascio di* $\mathfrak{K}_\lambda$ *l'insieme degli elementi* c *di* $\mathfrak{K}_\lambda$, *tali che* $abc \in \mathfrak{K}_\lambda$: per il teorema delle tre simmetrie di $\mathfrak{Q}$ questo significa che i piani α, β, γ di $S(3, q)$ associati ad a, b, c appartengono ad uno stesso fascio, passano cioè per una retta r. Se $\mathfrak{F}$ è un fascio di $\mathfrak{K}_\lambda$ ed r è la retta di $S(3, q)$ associata ad $\mathfrak{F}$, secondo che il punto $P = r \cap \omega$ sia interno o esterno ad $\mathfrak{L}$, oppure appartenga ad $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{F}$ viene detto *ellittico*, *iperbolico* o *parabolico* e contiene $q + 1, q$, o $q - 1$ elementi. I fasci ellittici inoltre sono $\frac{1}{2} q(q-1)$, quelli iperbolici $\frac{1}{2} q(q+1)$ e quelli parabolici $q + 1$. Va osservato che nel caso di un fascio $\mathfrak{F}$ di $\mathfrak{K}_\lambda$ ellittico o iperbolico gli elementi di $\mathfrak{F}$ sono permutabili con un elemento di $\mathfrak{K}_\lambda$ e inoltre le restrizioni ad $\mathfrak{L}$ degli elementi di $\mathfrak{F}$ sono involuzioni appartenenti ad uno stesso fascio e sono permutabili con una stessa involuzione. Se $\mathfrak{F}$ è parabolico, gli elementi di $\mathfrak{F}$ determinano su $\mathfrak{L}$ involuzioni iperboliche aventi in comune come punto unito uno stesso punto di $\mathfrak{L}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche (sezione n. 4) del C.N.R., presso l'Istituto di Matematica Applicata della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1973.

Ciò premesso, come *rette e punti del piano* Π_H da rappresentare su $\mathcal{Q}$ assumiamo rispettivamente *gli elementi e i fasci di* $\mathcal{R}_\lambda$. Una *retta di* Π_H viene detta *ellittica* o *iperbolica*, secondo che sia tale l'elemento corrispondente di $\mathcal{R}_\lambda$; un *punto di* Π_H viene detto *ellittico*, *iperbolico* o *singolare*, secondo che sia rappresentato da un fascio ellittico, iperbolico o parabolico.

La relazione di *appartenenza tra una retta e un punto di* Π_H viene espressa dall'*appartenenza di tre elementi di* $\mathcal{R}_\lambda$ *ad uno stesso fascio* $\mathcal{F}$, per cui il loro prodotto è un elemento di $\mathcal{F}$.

Due *rette* di Π_H vengono dette *parallele*, se gli elementi corrispondenti di $\mathcal{R}_\lambda$ individuano un fascio parabolico, se cioè esse passano per un punto singolare di Π_H, altrimenti sono dette *incidenti*. Una retta ellittica non ha punti singolari e risulta perciò incidente rispetto a qualunque retta, mentre il parallelismo si presenta solo tra rette iperboliche. Si verifica facilmente che, *rispetto ad una retta iperbolica a di* Π_H, *per un punto* $P \notin a$, *passano due rette parallele ad a.*

Il piano Π_H così costruito risulta a debole struttura di incidenza, perché può mancare la retta per due punti distinti: infatti, dati due punti iperbolici o uno iperbolico e l'altro parabolico, può mancare la retta passante per essi, in quanto le rette associate in $S(3, q)$ possono appartenere ad un piano tangente a $\mathcal{Q}$ in un punto di $\mathcal{L}$. Per ottenere la struttura di incidenza di un piano proiettivo bisogna introdurre delle nuove *rette* che vengono chiamate *isotrope*, mentre le altre sono dette *ordinarie*. A questo scopo è utile premettere la definizione di perpendicolarità tra rette ordinarie.

Due rette ordinarie a e b di Π_H *vengono dette perpendicolari, se gli elementi corrispondenti* α *e* β *di* $\mathcal{R}_\lambda$ *sono permutabili* e quindi sono permutabili le involuzioni corrispondenti su $\mathcal{L}$. Poiché gli elementi di $\mathcal{R}_\lambda$ permutabili con un elemento γ di $\mathcal{R}_\lambda$ appartengono ad un fascio ellittico o iperbolico, *le rette di* Π_H *perpendicolari ad un retta ordinaria c passano per uno stesso punto non singolare* C *detto polo di c.* Viceversa, per una proprietà dei fasci non parabolici *le rette passanti per un punto non singolare* C *sono perpendicolari ad una stessa retta c*, la quale viene detta *polare di* C.

Ciò premesso, *dato un punto singolare* P, *si definisce retta isotropa associata a* P *l'insieme costituito da* P *e dai poli delle rette iperboliche per* P. Il piano Π_H ampliato con le rette isotrope acquista la struttura di incidenza di $S(3, q)$.

L'esistenza di terne di involuzioni su $\mathcal{L}$ permutabili a due a due significa esistenza su Π_H di terne di rette perpendicolari a due a due, cioè *esistenza su* Π_H *di triangoli trirettangoli.* Le terne di involuzioni su $\mathcal{L}$, permutabili a due a due, sono tali che sia dispari il numero di quelle iperboliche, se $\frac{1}{2}(q+1)$ è dispari, e sia invece dispari il numero di quelle ellittiche, se $\frac{1}{2}(q+1)$ è pari (v. [4]): questo significa che *i piani metrici del tipo di* Π_H, *rispetto ai triangoli trirettangoli, si possono suddividere in due classi, secondo che* $\frac{1}{2}(q+1)$ *sia dispari o pari.*

Indichiamo con G_λ *il gruppo generato dagli elementi di* $\mathcal{R}_\lambda$. Se $\alpha \in \mathcal{R}_\lambda$, indichiamo con $\mathcal{S}_\alpha$ l'*automorfismo interno di* G_λ *associato ad* α. Poiché il prodotto di tre elementi di $\mathfrak{R}_\lambda$ appartenenti ad un fascio $\mathfrak{F}$ è uguale ad un elemento di $\mathfrak{F}$, mediante $\mathfrak{S}_\alpha$, gli elementi di $\mathfrak{R}_\lambda$ si mutano in elementi dello stesso tipo e restano uniti gli elementi di $\mathfrak{R}_\lambda$ permutabili con α. Questo significa che, mediante $\mathfrak{S}_\alpha$, rette di Π_H si mutano in rette di Π_H dello stesso tipo e restano unite quelle perpendicolari alla retta a rappresentata da α: si conservano inoltre la perpendicolarità e l'appartenenza, per cui punti si mutano in punti dello stesso tipo. $\mathfrak{S}_\alpha$ viene chiamato *simmetria assiale*. Si definisce *movimento di* Π_H *ogni prodotto di simmetrie assiali. I movimenti di* Π_H *formano un gruppo isomorfo al gruppo dei movimenti di un piano metrico finito di tipo iperbolico*. Infatti a tale gruppo risulta isomorfo il gruppo degli automorfismi interni di G_λ (v. [3], n. 1). Per altre proprietà del gruppo dei movimenti di Π_H si rimanda al n. 1 di [2].

II. Rappresentazione del piano euclideo finito

Nello spazio $S(3, q)$ del n. 1 siano $\mathfrak{Q}_1$ *una quadrica a punti ellittici*, Φ_1 *la polarità definita da* $\mathfrak{Q}_1$ ed E *un punto di* $\mathfrak{Q}_1$. Indichiamo con $\mathfrak{R}_E$ *l'insieme delle simmetrie di* $\mathfrak{Q}_1$ *aventi* E *come punto unito*: gli elementi di $\mathfrak{R}_E$ sono $q^2 + q$. Dati due elementi α e β di $\mathfrak{R}_E$ si definisce *fascio di* $\mathfrak{R}_E$ *l'insieme degli elementi* γ *di* $\mathfrak{R}_E$ *tali che* $\alpha\beta\gamma \in \mathfrak{R}_E$. Come al n. 1, ad ogni fascio $\mathfrak{F}$ di $\mathfrak{R}_E$ è associata una retta r di $S(3, q)$, la quale passa per E e quindi rispetto a $\mathfrak{Q}_1$ può essere secante o tangente: in corrispondenza il *fascio* $\mathfrak{F}$ viene detto *proprio* o *improprio*. I fasci propri sono q^2 e quelli impropri $q + 1$: ciascuno dei primi contiene $q + 1$ elementi e ciascuno degli altri contiene q elementi.

Ciò premesso, come *rette e punti del piano* Π_E da rappresentare su $\mathfrak{Q}_1$ assumiamo rispettivamente *gli elementi e i fasci di* $\mathfrak{R}_E$. Un *punto* di Π_E viene detto *proprio* o *improprio*, secondo che tale sia il fascio immagine di esso.

La relazione di *appartenenza tra rette e punti di* Π_E è identica a quella del piano Π_H del n. 1. Due *rette* di Π_E vengono dette *parallele*, se gli elementi corrispondenti di $\mathfrak{R}_E$ appartengono ad un fascio improprio.

Come al n. 1 la *perpendicolarità tra rette di* Π_E viene definita come *permutabilità tra gli elementi corrispondenti di* $\mathfrak{R}_E$. Poiché gli elementi di $\mathfrak{R}_E$ permutabili con un elemento α di $\mathfrak{R}_E$ formano un fascio improprio $\mathfrak{F}$ e sono permutabili anche con gli elementi del fascio improprio $\mathfrak{F}'$ contenente α, si ha che *le rette di* Π_E *perpendicolari ad una retta a sono parallele tra loro e sono perpendicolari alle rette parallele ad a*. Da questa proprietà consegue l'*esistenza dei rettangoli*.

Indichiamo con G_E *il gruppo generato da* $\mathfrak{R}_E$. Ragionando come al n. 1 assumiamo come *simmetria assiale di* Π_E *l'automorfismo interno di* G_E *relativo ad un elemento di* $\mathfrak{R}_E$ e definiamo *movimento di* Π_E *ogni prodotto di simmetrie assiali. I movimenti di* Π_E *generano un gruppo* G_E^* *che è isomorfo al gruppo dei movimenti del piano euclideo costruito su un campo di caratteristica* > 2. A tale gruppo è isomorfo infatti il gruppo G_E, dato che ad ogni elemento di $\mathfrak{R}_E$ è associato un ben determinato elemento di una rete impropria di omologie armoniche di $S(3, q)$ permutabili con Φ_1 (v. [2], n. 1). Per altre proprietà del gruppo dei movimenti di Π_E si rimanda al n. 1 di [2].

III. RAPPRESENTAZIONE DEL PIANO DI MINKOWSKI FINITO

Nello stesso spazio $S(3, q)$ dei paragrafi precedenti siano $\mathcal{Q}_2$ *una quadrica a punti iperbolici*, Φ_2 *la polarità definita da* $\mathcal{Q}_2$ ed M *un punto di* $\mathcal{Q}_2$. Indichiamo con $\mathfrak{R}_M$ *l'insieme delle simmetrie di* $\mathcal{Q}_2$ *aventi* M *come punto unito*: gli elementi di $\mathfrak{R}_M$ sono $q^2 - q$. Dati due elementi α e β di $\mathfrak{R}_M$ si chiama *fascio di* $\mathfrak{R}_M$ *l'insieme* $\mathfrak{F}(\alpha, \beta)$ *degli elementi* γ *di* $\mathfrak{R}_M$ *tali che* $\alpha\beta\gamma \in \mathfrak{R}_M$. Come nei paragrafi precedenti ad ogni fascio di $\mathfrak{R}_M$ è associata una retta r di $S(3, q)$, la quale passa per M e rispetto a $\mathcal{Q}_2$ può essere secante o tangente. In corrispondenza il *fascio* viene detto *proprio* o *improprio*. I fasci propri sono q^2 e quelli impropri $q - 1$: ciascuno dei primi contiene $q - 1$ elementi e ciascuno degli altri q elementi.

Ciò premesso, come *rette e punti del piano* Π_M da rappresentare su $\mathcal{Q}_2$ assumiamo rispettivamente *gli elementi e i fasci di* $\mathfrak{R}_M$. Un *punto* di Π_M viene detto *proprio* o *improprio*, secondo che tale sia il fascio immagine di esso.

La relazione di *appartenenza tra rette e punti* di Π_M è identica a quella dei piani Π_H e Π_E. Due *rette* di Π_M vengono dette *parallele*, se gli elementi corrispondenti di $\mathfrak{R}_M$ appartengono ad un fascio improprio.

La struttura di incidenza di Π_M è più debole di quella del piano di Minkowski costruito su un campo di caratteristica > 2, in quanto, dati due punti propri distinti di Π_M, può non esistere la retta passante per essi: infatti due fasci propri $\mathfrak{F}_1$ ed $\mathfrak{F}_2$ di $\mathfrak{R}_M$ non hanno in comune un elemento di $\mathfrak{R}_M$, nel caso in cui le rette di $S(3, q)$ associate ad $\mathfrak{F}_1$ ed $\mathfrak{F}_2$ appartengono ad un piano tangente a $\mathcal{Q}_2$. Per ottenere la struttura di incidenza del suddetto piano di Minkowski bisogna introdurre delle nuove *rette*, che vengono chiamate *isotrope*, mentre le altre vengono dette *ordinarie*. *Dati su* Π_M *due punti propri* A *e* B *non congiungibili, si definisce retta isotropa di* Π_M *per* A *e* B *l'insieme costituito dai punti* A *e* B *e dai punti propri di* Π_M *non congiungibili con* A *e* B. Ad ogni retta isotropa risulta associato un piano di $S(3, q)$ tangente a $\mathcal{Q}_2$ e passante per M: poiché i piani di $S(3, q)$ tangenti a $\mathcal{Q}_2$ in punti diversi da M sono suddivisi in due fasci, anche le rette isotrope di Π_M sono suddivise in due fasci impropri. Siccome per una retta di $S(3, q)$ per M secante $\mathcal{Q}_2$ passano due piani tangenti a $\mathcal{Q}_2$, si ha che *per un punto proprio di* Π_M *passano due rette isotrope*. I due fasci impropri di rette isotrope vengono assunti come punti impropri singolari e ad ogni retta isotropa viene aggiunto uno di essi.

Come per Π_H e Π_E, *la perpendicolarità tra rette ordinarie di* Π_M *viene definita come permutabilità tra gli elementi corrispondenti di* $\mathfrak{R}_M$. Ragionando come per Π_E si ha che *le rette ordinarie di* Π_M, *perpendicolari ad una retta ordinaria a, sono parallele tra loro e sono perpendicolari anche a tutte le rette ordinarie parallele ad a*: ne consegue l'*esistenza dei rettangoli*.

Indichiamo infine con G_M *il gruppo generato da* $\mathfrak{R}_M$. Ragionando come per Π_H assumiamo come *simmetria assiale di* Π_M *l'automorfismo interno di* G_M *relativo ad un elemento di* $\mathfrak{R}_M$ e definiamo *movimento di* Π_M *ogni prodotto di* *simmetrie assiali di* Π_M. *I movimenti di* Π_M *generano un gruppo isomorfo al gruppo dei movimenti del piano di Minkowski su un campo di caratteristica* > 2. A tale gruppo è isomorfo infatti il gruppo G_M, dato che ad ogni elemento di $\mathfrak{R}_M$ è associato un ben determinato elemento di una rete impropria di omologie armoniche di $S(3, q)$ permutabili con Φ_2 (v. [2], n. 2). Per altre proprietà del gruppo dei movimenti di Π_M si rimanda al n. 2 di [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*. Edizioni Cremonese. Roma 1961.

[2] V. DICUONZO, *Su un classe di spazi metrici finiti e i gruppi dei loro movimenti*, « Annali di Matematica pura ed applicata » (di prossima pubblicazione).

[3] V. DICUONZO, *Su una classe di spazi metrici finiti a debole struttura di incidenza*, « Annali di Matematica pura ed applicata » (di prossima pubblicazione).

[4] V. DICUONZO, *Sulla rappresentazione di piani metrici finiti di tipo iperbolico su rette proiettive*, « Atti dell'Accademia Naz. dei Lincei », Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat., ser. VIII, *51* (6), Dicembre 1971.