Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur l'inéquation des ondes non linéaire dans la fonction inconnue et avec un convexe dépendant du temps. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.3-4, p. 178–186.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_3-4_178_0>

Analisi matematica. — *Sur l'inéquation des ondes non linéaire dans la fonction inconnue et avec un convexe dépendant du temps.* Nota II di MARCO BIROLI (*) presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dà la dimostrazione del Teorema 1 enunziato nella Nota I.

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

On peut, pour la condition (1,4), supposer sans perdre de généralité $K_2(t) = \mathfrak{L}^2(\Omega)$.

Démontrons, d'abord, l'existence d'une solution du problème de Cauchy

$$
\begin{aligned}
(2,1) \qquad & u''(t) - \Delta u(t) + |u(t)|^{\rho} u(t) + (\partial I_{K_1(t)})_{\lambda} u'(t) = \\
& = f(t) \quad \text{p.p. sur} \quad [0, T] \quad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(\Omega), \lambda > 0. \\
& u(0) = u_0 \qquad u'(0) = u_1 \\
& u(t) \in C(0, T; H_0^1(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Nous utilisons la méthode de Faedo–Galerkin.

Indiquons par $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots\}$ la base orthonormale de $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ formée par les vecteurs propres de Δ, qui est aussi une base de $H_0^1(\Omega)$ et de $H^2(\Omega)$, par V_n l'espace engendré par les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ et par $(,)$ l'usuel produit scalaire dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$.

Considérons le système

$$
\begin{aligned}
(2,2_n) \qquad & (u''(t), v_i) - (\Delta u(t), v_i) + (|u(t)|^{\rho} u(t), v_i) + \\
& + ((\partial I_{K_1(t)})_{\lambda} u'(t), v_i) = (f(t), v_i), \qquad i = 1, \cdots, n. \\
& u(0) = u_{0n} \qquad u'(0) = u_{1n} \\
& u(t) \in C(0, T; V_n)
\end{aligned}
$$

où $u_{0n}, u_{1n} \in V_n$ et

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n \to \infty} u_{0n} = u_0 \qquad \text{dans} \quad H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\
& \lim_{n \to \infty} u_{1n} = u_1 \qquad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Des théorèmes connus sur les systèmes d'équation différentielles ordinaires on a que (2,2) à une solution définie sur l'interval $[0, t_n]$.

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Parma ed Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 19 giugno 1973.

De $(2,2_n)$ on a

$$(2,3) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| u_n'(t)\|^2_{H_0^1} + \| \Delta u_n(t)\|_{\mathfrak{L}^2}) =$$
$$= (f(t), -\Delta u_n'(t)) - (|u_n(t)|^\rho u_n(t), -\Delta u_n'(t)) -$$
$$- ((\partial I_{K_1(t)})_\lambda u_n'(t), -\Delta u_n'(t)).$$

Observons maintenant que, [3], on a

$$((\partial I_{K_1(t)})_\lambda u_n'(t), -\Delta u_n(t)) \geq (a(t), (\partial I_{K_1(t)}) u_n'(t)).$$

De (2,3), en intégrant, on a donc

$$(2,4) \qquad \frac{1}{2}\| u_n(t)\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|\Delta u_n(t)\|^2_{\mathfrak{L}^2} \leq \frac{1}{2}\| u_1\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|\Delta u_0\|^2_{\mathfrak{L}^2} +$$
$$+ \int_0^t \Big\{ (f(s), -\Delta u_n'(s)) - (|u_n(t)|^\rho u_n(t), -\Delta u_n'(s)) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\| a_1(s)\|_{\mathfrak{L}^2} \| u_n'(s)\|_{\mathfrak{L}^2} + \frac{C_1}{\lambda}\| a_1(s)\|_{\mathfrak{L}^2}\Big\} ds.$$

De (2,4), en intégrant par partie, on a

$$\frac{1}{2}\| u_n'(t)\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|\Delta u_n(t)\|^2_{\mathfrak{L}^2} \leq C_2 + (f(t), -\Delta u_n(t)) -$$
$$- (|u_n(t)|^\rho u_n(t), -\Delta u_n(t)) - (f(0), -\Delta u_{0n}) +$$
$$+ (|u_{0n}|^\rho u_{0n}, -\Delta u_{0n}) + \int_0^t \Big\{ (f'(s), \Delta u_n(s)) -$$
$$- \rho(|u_n(s)|^\rho u_n'(s), \Delta u_n(s)) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\| a_1(s)\|_{\mathfrak{L}^2}\| u_n'(s)\|_{\mathfrak{L}^2} + \frac{C_1}{\lambda}\| a_1(s)\|_{\mathfrak{L}^2}\Big\} ds.$$

D'après les théorèmes de Sobolev, si

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1$$

on a $\mathfrak{L}^q(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$; observons, qu' étant $\rho \leq \frac{2}{n-2}$, on a aussi $\rho n \leq q$.

On a alors

$$|(|u_n(t)|^\rho u_n'(t), \Delta u(t))| \leq \| |u_n(t)|^\rho \|_{\mathfrak{L}^n} \| u_n'(t)\|_{\mathfrak{L}^q} \|\Delta u(t)\|_{\mathfrak{L}^2} \leq$$
$$\leq \| u_n(t)\|_{H_0^1} \| u_n'(t)\|_{H_0^1} \|\Delta u(t)\|_{\mathfrak{L}^2}.$$

On a alors,

$$(2,5) \qquad \frac{1}{2} \| u_n'(t) \|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2} \| \Delta u_n(t) \|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq$$
$$\leq C_3 + (f(t), -\Delta u_n(t)) - (| u_n(t) |^\rho u_n(t), -\Delta u_n(t)) +$$
$$+ \int_0^t \Big\{ \| f'(s) \|_{\mathcal{L}^2} \| \Delta u_n(s) \|_{\mathcal{L}^2} + \| u_n(s) \|_{H_0^1}^\rho \| u_n'(s) \|_{H_0^1} \cdot$$
$$\cdot \| \Delta u_n(s) \|_{\mathcal{L}^2} + \frac{1}{\lambda} \| a_1(s) \|_{\mathcal{L}^2} \| u_n'(s) \|_{\mathcal{L}^2} + \frac{C_1}{\lambda} \| a_1(s) \|_{\mathcal{L}^2} \Big\} ds .$$

De $(2,2_n)$ on a aussi

$$(2,6) \qquad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\| u_n'(t) \|_{\mathcal{L}^2} + \| u_n(t) \|_{H_0^1} + \| u_n(t) \|_{\mathcal{L}^{\rho+2}}^{\rho+2}) \leq$$
$$\leq (f(t), u_n'(t)) - ((\partial I_{K_1(t)})_\lambda u_n'(t), u_n'(t)) \leq$$
$$\leq C_4 \| u_n'(t) \|_{\mathcal{L}^2} + C_4' .$$

De $(2,6)$ on a

$$(2,7) \qquad \| u_n(t) \|_{H_0^1} \leq C_5$$

p.p. sur $[0, t_n]$, où C_5 est une constante qui ne dépende pas de n et t_n, mais dépende de λ.

De $(2,5)$ on a alors

$$(2,8) \qquad \frac{1}{2} \| u_n'(t) \|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2} \| \Delta u_n(t) \|_{\mathcal{L}^2} \leq$$
$$\leq C_3 + (f(t), -\Delta u_n(t)) - (| u_n(t) |^\rho u_n(t), -\Delta u_n(t)) +$$
$$+ \int_0^t \Big\{ \| f'(s) \|_{\mathcal{L}^2} \| \Delta u_n(s) \|_{\mathcal{L}^2} + C_5^\rho \| u_n'(s) \|_{H_0^1} \| \Delta u_n(s) \|_{\mathcal{L}^2} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda} \| a_1(s) \|_{\mathcal{L}^2} \| u_n'(s) \|_{\mathcal{L}^2} + \frac{C_1}{\lambda} \| a_1(s) \|_{\mathcal{L}^2} \Big\} ds \leq$$
$$\leq C_3 + (f(t), -\Delta u_n(t)) + \| u_n(t) \|_{H_0^1}^{\rho+1} \| \Delta u_n(t) \|_{\mathcal{L}^2} +$$
$$+ \int_0^t \Big\{ \| f'(s) \|_{\mathcal{L}^2} \| \Delta u_n(s) \|_{\mathcal{L}^2} + C_5^\rho \| u_n'(s) \|_{H_0^1} \| \Delta u_n(s) \|_{\mathcal{L}^2} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda} \| a_1(s) \|_{\mathcal{L}^2} \| u_n'(s) \|_{\mathcal{L}^2} + \frac{C_1}{\lambda} \| a_1(s) \|_{\mathcal{L}^2} \Big\} ds \leq$$
$$\leq C_2 + M \| \Delta u_n(t) \|_{\mathcal{L}^2} + C_5^{\rho+1} \| \Delta u_n(t) \|_{\mathcal{L}^2} +$$
$$+ \int_0^t \Big\{ \| f'(s) \|_{\mathcal{L}^2} \| \Delta u_n(s) \|_{\mathcal{L}^2} + C_5^\rho \| u_n'(s) \|_{H_0^1} \| \Delta u_n(s) \|_{\mathcal{L}^2} +$$
$$+ \frac{1}{\lambda} \| a_1(s) \|_{\mathcal{L}^2} \| u_n'(s) \|_{\mathcal{L}^2} + \frac{C_1}{\lambda} \| a_1(s) \|_{\mathcal{L}^2} \Big\} ds .$$

De (2,8) on a:

$$(2,9) \qquad \begin{aligned} &\| u_n'(t) \|_{H_0^1} \leq C_6 \\ &\| \Delta u_n(t) \|_{\mathcal{L}^2} \leq C_7 \end{aligned}$$

p.p. sur $[o, t_n]$, et donc

$$(2,10) \qquad \| u_n''(t) \|_{\mathcal{L}^2} \leq C_8$$

p.p. sur $[o, t_n]$, où C_6, C_7, C_8 sont des constantes, qui ne dépendent pas de n ou t_n, mais qui dépendent de λ.

On peut donc prolonger la fonction $u_n(t)$ à une solution de $(2,2_n)$ sur $[o, T]$ pour laquelle (2,9) et (2,10) sont valables sur $[o, T]$ p.p.

De (2,9) et (2,10) on peut supposer sans perdre de généralité que

$$(2,11) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n''(t) = u''(t)$$

dans $\mathcal{L}^2(o, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$

$$(2,12) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n'(t) = u'(t)$$

dans $H_0^1(\Omega)$ uniformément sur $[o, T]$

$$(2.13) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n(t) = u(t)$$

dans $H^2(\Omega)$ uniformément sur $[o, T]$.

De (2,12) on a

$$(2,14) \qquad \lim_{n\to\infty} (\partial I_{K_1(t)})_\lambda u_n'(t) = (\partial I_{K_1(t)})_\lambda u'(t)$$

dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ uniformément sur $[o, T]$.

De (2,13) on a

$$(2,15) \qquad \lim_{n\to\infty} | u_n(t) |^\rho u_n(t) = | u(t) |^\rho u(t)$$

dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ uniformément sur $[o, T]$.

De (2,11), (2,13), (2,14) et (2,15) on a que $u(t)$ est solution de (2,1); le résultat est ainsi démontré.

Démontrons maintenant la partie du théorème concernante l'existence.

Considérons l'équation

$$(2,16) \qquad \begin{aligned} &u''(t) - \Delta u(t) + | u(t) |^\rho u(t) + (\partial I_{K_1(t)})_\lambda u'(t) = \\ &= f(t) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur } [o, T] \quad \text{dans } \mathcal{L}^2(\Omega), \lambda > o \\ &u(o) = u_0 \qquad u'(o) = u_1 . \end{aligned}$$

De la partie précédente, (2,16) a une solution $u_\lambda(t) \in \mathcal{L}^\infty(o, T; H^2(\Omega) \cap \cap H_0^1(\Omega))$ avec $u_\lambda'(t) \in \mathcal{L}^\infty(o, T; H_0^1(\Omega))$ et $u_\lambda''(t) \in \mathcal{L}^\infty(o, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$.

Nous observons que:

$$(\partial I_{K_1(t)})_\lambda = \frac{v - P_{K_1(t)} v}{\lambda}$$

$\forall \lambda > o, v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, où $P_{K_1(t)}$ est l'opérateur de projection sur $K_1(t)$.

Indiquons

$$h_\lambda(t) = \| u'_\lambda(t) - P_{K_1(t)}\, u'_\lambda(t) \|_{\mathfrak{L}^2} .$$

On a [6],

$$| h_\lambda(t)\, h'_\lambda(t) - (u''_\lambda(t), u'_\lambda(t) - P_{K_1(t)}\, u'_\lambda(t)) | \leq \left| \frac{dv}{dt}(t) \right| h_\lambda(t)$$

où $v(t)$ indique la variation du convexe $K_1(t)$ (cfr. [5], [6]), dont

$$| h_\lambda(t)\, h'_\lambda(t) + (\Delta u_\lambda(t) - | u_\lambda(t) |^\rho u_\lambda(t) - (\partial I_{K_1(t)})_\lambda\, u'_\lambda(t), u'_\lambda(t) - P_{K_1(t)}\, u'_\lambda(t)) | \leq$$

$$\leq \left| \frac{dv}{dt}(t) \right| h_\lambda(t)$$

dont

$$\left| h'_\lambda(t) + \frac{1}{\lambda} h_\lambda(t) \right| \leq \left| \frac{dv}{dt}(t) \right| + \tag{2,17}$$

$$+ \| \Delta u_\lambda(t) \|_{\mathfrak{L}^2} + \| u_\lambda(t) \|^{\rho+1}_{H^1_0} + \| f(t) \|_{\mathfrak{L}^2} .$$

De (2,16) on a:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\| u'_\lambda(t) \|^2_{\mathfrak{L}^2} + \| u_\lambda(t) \|^2_{H^1_0} - \| u_\lambda(t) \|^{\rho+2}_{\mathfrak{L}^{\rho+2}}) \leq \tag{2,18}$$

$$\leq (f(t), u'_\lambda(t)) - ((\partial I_{K_1(t)})_\lambda\, u'_\lambda(t), u'_\lambda(t))$$

dont on a

$$\| u_\lambda(t) \|_{H^1_0} \leq Q_1 \tag{2,19}$$

p.p. sur $[0, T]$, où Q_1 est une constante qui ne dépende pas de λ.

De (2,16) on a aussi

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\| u_\lambda(t) \|^2_{H^1_0} + \| \Delta u_\lambda(t) \|^2_{\mathfrak{L}^2}) \leq (f(t), -\Delta u'_\lambda(t)) -$$

$$- (| u_\lambda(t) |^\rho u_\lambda(t), -\Delta u'_\lambda(t)) - ((\partial I_{K_1(t)})_\lambda\, u'_\lambda(t), u'_\lambda(t)) .$$

Par le même procédé de la prémière partie on a alors

$$\frac{1}{2} \| u'_\lambda(t) \|_{H^1_0} + \frac{1}{2} \| \Delta u_\lambda(t) \|_{\mathfrak{L}^2} \leq \frac{1}{2} \| u_1 \|^2_{H^1_0} + \frac{1}{2} \| \Delta u_0 \|^2_{\mathfrak{L}^2} +$$

$$+ (f(t), -\Delta u_\lambda(t)) - (| u_\lambda(t) |^\rho u_\lambda(t), -\Delta u_\lambda(t)) -$$

$$- (f(0), -\Delta u_0) + (| u_0 |^\rho u_0, -\Delta u_0) +$$

$$+ \int_0^t \Big\{ (f'(s), -\Delta u_\lambda(t)) + \rho \| u_\lambda(s) \|^\rho_{H^1_0} \| u'_\lambda(s) \|_{H^1_0} \| \Delta u_\lambda(s) \|_{\mathfrak{L}^2} +$$

$$+ \| a(s) \|_{\mathfrak{L}^2} \| (\partial I_{K_1(s)})_\lambda\, u'_\lambda(s) \|_{\mathfrak{L}^2} \Big\}\, ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \| u_1 \|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2} \| \Delta u_0 \|^2_{\mathcal{L}^2} + (f(t), - \Delta u_\lambda(t)) -$$

$$- (| u(t) |^\rho u(t), - \Delta u_\lambda(t)) - (f(0), - \Delta u_0) +$$

$$+ (| u_0 |^\rho u_0, - \Delta u_0) + \int_0^t \Big\{ (f'(s), - \Delta u_\lambda(s)) +$$

$$+ \rho \| u_\lambda(s) \|^\rho_{H_0^1} \| u'_\lambda(s) \|_{H_0^1} \| \Delta u_\lambda(s) \|_{\mathcal{L}^2} +$$

$$+ \| a(s) \|_{\mathcal{L}^2} \left(\left| \frac{dv}{dt}(s) \right| + \| \Delta u_\lambda(s) \|_{\mathcal{L}^2} + \| u_\lambda(s) \|^{\rho+1}_{H_0^1} + \| f(s) \|_{\mathcal{L}^2} \right) \Big\} ds$$

dont, étant $\mathcal{L}^{2(\rho+1)}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ et de (2,19)

$$\leq \frac{1}{2} \| u_1 \|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2} \| \Delta u_0 \|^2_{\mathcal{L}^2} + Q_2 \| \Delta u_0 \|_{\mathcal{L}^2} +$$

$$+ M \| \Delta u_\lambda(t) \|_{\mathcal{L}^2} + Q_1^{\rho+1} \| \Delta u_\lambda(t) \|_{\mathcal{L}^2} +$$

$$+ \int_0^t \Big\{ (f'(s), - \Delta u_\lambda(s)) + \rho Q_1^\rho \| u'_\lambda(s)) \|_{H_0^1} \| \Delta u_\lambda(s) \|_{\mathcal{L}^2} +$$

$$+ \| a(s) \|_{\mathcal{L}^2} \left(\left| \frac{dv}{dt}(t) \right| + \| \Delta u_\lambda \|_{\mathcal{L}^2} + Q_1^{\rho+1} + \| f(s) \|_{\mathcal{L}^2} \right) \Big\} ds$$

où Q_2 est une constante qui ne dépende pas de λ.

On a alors

$$\| \Delta u_\lambda(t) \|_{\mathcal{L}^2} \leq Q_3 \tag{2,20}$$

$$\| u'_\lambda(t) \|_{H_0^1} \leq Q_4 \tag{2,21}$$

p.p. sur $[0, T]$, où Q_3 et Q_4 sont des constantes qui ne dépendent pas de λ.

De (2,17) on a alors

$$\left| h'_\lambda(t) + \frac{1}{\lambda} h_\lambda(t) \right| \leq \left| \frac{dv}{dt}(t) \right| + Q_6 \tag{2,22}$$

où Q_6 est une constante qui ne dépende pas de λ.

De (2,22) et des lemmes 3 et 4 de [1], on peut alors supposer sans perdre de généralité que

$$\lim_{\lambda \to 0}{}^* (\partial I_{K_1(t)})_\lambda u'_\lambda(t) = \chi(t) \qquad \text{dans } \mathcal{L}^1(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega)). \tag{2,23}$$

De (2,20) et (2,21) on peut alors supposer sans perdre de généralité

$$\lim_{\lambda \to 0}{}^* u_\lambda(t) = u(t) \tag{2,24}$$

dans $H^2(\Omega)$ uniformément sur $[0, T]$,

$$\lim_{\lambda \to 0}{}^* u'_\lambda(t) = u'(t) \tag{2,25}$$

dans $H_0^1(\Omega)$ uniformément sur $[o, T]$ et donc

$$\lim_{\lambda \to 0} u'_\lambda(t) = u'(t) \tag{2,26}$$

dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ uniformément sur $[o, T]$ et enfin

$$\lim_{\lambda \to 0}{}^{*} u''_\lambda(t) = u''(t) \tag{2,27}$$

dans $\mathfrak{L}^1(o, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$.

Observons maintenant que

$$(\partial I_{K_1(t)})_\lambda u'_\lambda(t) \in (\partial I_{K_1(t)})(J_\lambda(t) u'_\lambda(t))$$

où $J_\lambda(t) : \mathfrak{L}^2(\Omega) \to \mathfrak{L}^2(\Omega)$ est la resolvante de $\partial I_{K_1(t)}$.

De (2,26) on a que

$$\lim_{\lambda \to 0} (J_\lambda(t) u'_\lambda(t) - J_\lambda(t) u'(t)) = o \tag{2,28}$$

dans $\mathfrak{L}^2(o, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$.

De (2,28) on a alors que

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda(t) u'_\lambda(t) = u'(t) \tag{2,29}$$

dans $\mathfrak{L}^2(o, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$.

De (2,23) et (2,29) on a

$$\chi(t) \in \partial I_{K_1(t)} u'(t) \tag{2,30}$$

p.p. sur $[o, T]$ dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$.

De (2,24) on a aussi

$$\lim_{\lambda \to 0} |u_\lambda(t)|^\rho u_\lambda(t) = |u(t)|^\rho u(t) \tag{2,31}$$

dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ uniformément sur $[o, T]$.

De (2,23), (2,24), (2,27), (2,30), (2,31) on a

$$\begin{aligned} & u''(t) - \Delta u(t) + |u(t)|^\rho u(t) + \\ & + \partial I_{K_1(t)} u'(t) \ni f(t) \qquad \text{p.p. sur } [o, T] \qquad \text{dans } \mathfrak{L}^2(\Omega) \\ & u(o) = u_0 \qquad u'(o) = u_1 \\ & u(t) \in C(o, T; H_0^1(\Omega)) . \end{aligned} \tag{2,32}$$

On a ainsi démontré la partie du théorème concernante l'existence.

Passons maintenant à la partie concernante l'unicité.

Soient $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux solutions dans $C(o, T; H_0^1(\Omega))$ de (2,32) et indiquons $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$.

On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|w'(t)\|_{\mathfrak{L}^2}^2 + \|w(t)\|_{H_0^1}^2) \le \\ & \le -((|u_1(t)|^\rho u_1(t) - |u_2(t)|^\rho u_2(t)), w'(t)) . \end{aligned} \tag{2,33}$$

De (2,33) par la même méthode utilisée dans le cas $K_1(t) = V$ par J. L. Lions, [4] pg. 15, on démontre $u_1(t) = u_2(t)$ p.p. sur $[0, T]$.

Le résultat est ainsi complètement démontré.

§ 3. UN EXEMPLE

Soient $\psi_i(t, x)$, $i = 1, 2$, deux fonctions dans $\mathfrak{L}^\infty(0, T; H^2(\Omega))$ avec $\frac{\partial\psi_i}{\partial t}(t, x) \in \mathfrak{L}^1(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$, $\psi_1(t, x) \leq 0 \leq \psi_2(t, x)$ p.p. sur $[0, T] \times \Gamma$ et $\psi_1(t, x) < \psi_2(t, x)$ p.p. sur $[0, T] \times \Omega$, $u_0(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $u_1(x) \in H_0^1(\Omega)$ avec $\psi_1(0, x) \leq u_1(x) \leq \psi_2(0, x)$ p.p. sur Ω.

Posons enfin

$$(3,1) \qquad K_1(t) = \{v(x) \mid v(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega) \quad v(x) \geq \psi_1(t, x) \quad \text{p.p. sur } \Omega\}$$

$$(3,2) \qquad K_2(t) = \{v(x) \mid v(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega) \quad v(x) \leq \psi_2(t, x) \quad \text{p.p. sur } \Omega\}.$$

Posons

$$a_i(t) = \Delta\psi_i(t, \cdot) \qquad i = 1, 2.$$

Par le principe du maximum on peut vérifier que $a_i(t)$, $K_i(t)$, $i = 1, 2$, satisfont (1,3); on vérifie aussi facilement que les convexes $K_i(t)$ satisfont (1,4).

Dans ce cas on peut donc appliquer le Théorème 1 et conclure que le problème (1,2) a une unique solution $u(t) \in \mathfrak{L}^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ avec $u'(t) \in \mathfrak{L}^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $u''(t) \in \mathfrak{L}^1(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$.

Observons enfin que dans ce cas le problème (1,2) est equivalent au problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \Delta u(t, x) + |u(t, x)|^\rho u(t, x) = f(t, x)$$

p.p. dans la partie de $[0, T] \times \Omega$ où on a

$$\psi_1(t, x) \leq \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \leq \psi_2(t, x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \psi_1(t, x) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \psi_2(t, x)$$

p.p. ailleurs dans $[0, T] \times \Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \in C(0, T; H_0^1(\Omega))$$

$$u(0, x) = u_0(x) \qquad \text{p.p. dans } \Omega.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \qquad \text{p.p. dans } \Omega.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BIROLI, *Sur les inéquations avec convexe dépendant du temps*, à paraître dans « Ricerche di Matematica ».

[2] H. BRÉZIS, *Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to non-linear partial differential équations*. Symposium on non linear Functional Analysis, Madison Wisconsin », 1971, Academic Press, 101–156 (1971).

[3] H. BRÉZIS, *Problèmes unilateraux*, « J. Math. Pures Appl. », *51*, 1–168 (1972).

[4] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod–Gauthier Villars (1969).

[5] J. J. MOREAU, *Distance à un convexe mobile d'une espace hilbertien*. Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe. Montpellier 1971. Exposé 13, 1–10.

[6] J. J. MOREAU, *Rafle par un convexe variable*. Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe. Montpellier. 1ère partie (1971), Exposé 15, 1–43. 2ème partie (1972), Exposé 3, 1–36.