
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ROMANO SCOZZAFAVA

**Sulle partizioni di un insieme finito su cui opera un
semigruppato di trasformazioni**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 55 (1973), n.3-4, p.
161–166.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_3-4_161_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica combinatoria. — *Sulle partizioni di un insieme finito su cui opera un semigruppato di trasformazioni* (*). Nota (**) di ROMANO SCOZZAFAVA, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Partitions of a finite set, which are induced by a transformation semigroup acting on it, are studied via the concepts of « orbitoid » (introduced in previous papers) and those of generating and non-absorbing subsets. These partitions give rise to corresponding ones for an arbitrary (finite) semigroup, through the Cayley representation.

I. INTRODUZIONE

Le orbitoidi di un semigruppato S di trasformazioni di un insieme finito X in sé, cioè i sottoinsiemi di X che sono (rispetto ad S) invarianti *minimali*, sono state introdotte in [3]. Esse costituiscono, quando si consideri l'azione di S (non su X ma) su X^2 , la struttura fondamentale per la costruzione delle configurazioni combinatorie regolari studiate in [6].

Nel n. 2 vengono definiti, accanto alla nozione di orbitoide, i concetti di sottoinsieme generatore e sottoinsieme assorbente, mostrando come essi intervengono nel problema di ottenere una partizione dell'insieme X su cui opera il semigruppato S .

L'interesse di questi risultati sta nel fatto che essi permettono di costruire una partizione di un arbitrario semigruppato astratto (finito) S_0 . Infatti, com'è noto, posto $X = S_0 \cup \{e\}$, esiste un semigruppato S di trasformazioni di X in sé, con S isomorfo ad S_0 . Nel n. 3 esaminiamo brevemente alcune proprietà di questa rappresentazione.

Infine nel n. 4, applicando i risultati del n. 2, stabiliamo un'altra notevole proprietà delle orbitoidi, che mette ulteriormente in luce come tale concetto sia la naturale generalizzazione di quello di « orbita » per i gruppi di permutazioni: data una trasformazione s di X in sé, e considerate le componenti disgiunte e connesse del grafo rappresentante s , le orbitoidi del semigruppato ciclico generato da s sono i « cicli » contenuti nelle suddette componenti.

Le orbitoidi di un arbitrario semigruppato finito S di trasformazioni appaiono così come un'estensione del concetto di ciclo dal caso di *una sola* trasformazione a quello di *un insieme* (semigruppato) di trasformazioni.

I risultati di questo lavoro possono essere applicati alla teoria algebrica degli automi, analogamente a quanto fatto in [5] per quelli stabiliti in [3], [4].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi Nazionali per la Matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1973.

2. PARTIZIONI DELL'INSIEME X

Prima di introdurre i concetti di *generatore* di un sottoinsieme di X e di sottoinsieme *assorbente* (cfr. Definizioni 1 e 2), elenchiamo brevemente (senza dimostrazione) alcuni semplici richiami e complementi dei risultati stabiliti in [3].

Sia S un semigruppato su X. Dato $\Gamma \subseteq X$ e posto

$$\Gamma^S = \{\alpha^s : \alpha \in \Gamma, s \in S\},$$

Γ si dice *invariante* (rispetto ad S) se $\Gamma^S \subseteq \Gamma$.

Il semigruppato S si dice *transitivo* se l'unico sottoinsieme invariante non vuoto è X stesso.

Un'orbitoide (di S su X) è un sottoinsieme Ω invariante (non vuoto) *minimale* (cioè tale che da $\Omega_0 \subseteq \Omega$ con $\Omega_0 \neq \emptyset$ e invariante, segue $\Omega_0 = \Omega$). Se Ω_i, Ω_j ($i \neq j$) sono orbitoidi distinte, risulta $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$.

Un sottoinsieme $\Gamma \subseteq X$ si dice *monogenico* se esiste $\beta \in \Gamma$ tale che $\Gamma = \beta^S$. È immediato che un insieme monogenico è invariante, mentre un insieme invariante *non* è necessariamente monogenico (per esempio X stesso, se S non è transitivo su X). Un sottoinsieme $\Omega \subseteq X$ si dice *totalmente monogenico* se, qualunque sia $\alpha \in \Omega$, si ha $\Omega = \alpha^S$.

TEOREMA 1. *Tutti e soli i sottoinsiemi totalmente monogenici di X sono le orbitoidi di S su X.*

Ciò premesso, introduciamo la seguente

DEFINIZIONE 1. *Sia S un semigruppato di trasformazioni di X, e sia $\Lambda \subseteq X$. Il generatore di Λ è l'insieme*

$$g\Lambda = \{\alpha \in X : \alpha^S \cap \Lambda \neq \emptyset\}.$$

Può essere $g\Lambda = \emptyset$, anche se $\Lambda \neq \emptyset$ (per esempio, se $X = \{1, 2, 3\}$ e $S = \{s_1, s_2\}$, con

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

basta considerare $\Lambda = \{3\}$); pertanto, mentre si ha sempre

$$(1) \quad g(\Lambda^S) \supseteq \Lambda,$$

l'inclusione $(g\Lambda)^S \supseteq \Lambda$ sussiste invece, per $\Lambda \neq \emptyset$, se e solo se anche $g\Lambda \neq \emptyset$. Dalla (1) segue che una condizione sufficiente affinché sia $g\Lambda \neq \emptyset$ è che Λ sia invariante (non vuoto): infatti da $\Lambda^S \subseteq \Lambda$ segue $g(\Lambda^S) \subseteq g\Lambda$, e quindi, per la (1), $g\Lambda \supseteq \Lambda \neq \emptyset$. Si può allora enunciare:

TEOREMA 2. *Se Γ è un sottoinsieme invariante (rispetto ad S) di X, si ha $g\Gamma \supseteq \Gamma$.*

Il teorema *non* è invertibile. Se $S = \{s_1, s_2\}$, con

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

si ha $g\{1, 3\} = \{1, 2, 3\} \supset \{1, 3\}$, tuttavia $\{1, 3\}$ non è invariante.

DEFINIZIONE 2. Un sottoinsieme $\Lambda \subseteq X$ si dice *assorbente* se $g\Lambda \subseteq \Lambda$.

COROLLARIO 1. Sia $\Gamma \subseteq X$ un sottoinsieme invariante. Allora Γ è non assorbente se e solo se $g\Gamma = \Gamma$.

LEMMA 1. Sia $\Theta = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}$ l'insieme delle orbitoidi di un semigruppò S su un insieme finito X . L'insieme dei generatori $g\Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) costituisce un ricoprimento di X , cioè

$$X = \bigcup_{i=1}^m g\Omega_i.$$

Dimostrazione. Sia $\beta \in X$. L'insieme invariante β^S contiene un'orbitoide Ω_k , e quindi $\beta \in g\Omega_k$.

Abbiamo già osservato in [3], mediante un esempio, che l'insieme

$$\Theta = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}$$

delle orbitoidi di S su X può costituire una partizione di X (e non necessariamente quella banale $\Theta = \{X\}$, quando S è transitivo) anche se S non è un gruppo di permutazioni (contrariamente a quanto accade per l'insieme $\mathfrak{S}$ delle orbitoidi di S su X^2 : cfr. Teorema 4.1 in [3]). Si ha in proposito il seguente:

TEOREMA 3. Si ha $X = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$, cioè le orbitoidi (di S su X) sono una partizione di X , se e solo se ogni sottoinsieme invariante di X è non assorbente.

Dimostrazione. L'insieme Θ sia una partizione di X . Allora qualunque sottoinsieme invariante Γ è necessariamente unione di orbitoidi, e lo stesso accade per $X \setminus \Gamma$. Ma allora, per il Teorema 1, per nessun $\alpha \in X \setminus \Gamma$ e nessun $s \in S$ può aversi $\alpha^s \in \Gamma$, cioè Γ è non assorbente.

Supponiamo ora che ogni sottoinsieme invariante sia non assorbente. Allora, per il Corollario 1, si ha in particolare $g\Omega_i = \Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), e quindi, per il Lemma 1, le orbitoidi Ω_i ricoprono X . Ciò conclude la dimostrazione del teorema, essendo gli insiemi Ω_i disgiunti.

Osserviamo che gli insiemi che costituiscono la suddetta partizione si possono riguardare indifferentemente come le orbitoidi oppure come i generatori di tali orbitoidi.

Si può ottenere direttamente una partizione di X costituita dai generatori delle orbitoidi, se il semigruppò S è commutativo. In questo caso tali generatori non coincidono necessariamente con le orbitoidi; l'esempio più interessante è quello studiato al n. 4.

TEOREMA 4. Sia S un semigruppò commutativo di trasformazioni di X . Allora l'insieme $\{g\Omega_1, g\Omega_2, \dots, g\Omega_m\}$ dei generatori delle orbitoidi di S su X è una partizione di X , e gli insiemi $g\Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) sono invarianti.

Dimostrazione. In virtù del Lemma 1, basta dimostrare che per $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$) si ha $g\Omega_i \cap g\Omega_j = \emptyset$. Se esistesse $\beta \in g\Omega_i \cap g\Omega_j$, si avrebbe, per opportuni $s_1, s_2 \in S$, $\beta^{s_1} \in \Omega_i$ e $\beta^{s_2} \in \Omega_j$; ma allora, per il Teorema 1, $\beta^{s_1 s_2} \in \Omega_i$ e $\beta^{s_2 s_1} \in \Omega_j$. D'altra parte $\beta^{s_1 s_2} = \beta^{s_2 s_1}$, e quindi le orbitoidi Ω_i e Ω_j avrebbero un elemento in comune (contraddizione).

Se $g\Omega_i$ non fosse invariante, esisterebbero $\alpha \in g\Omega_i$ e $s_1 \in S$ tali che $\alpha^{s_1} \notin g\Omega_i$. Ma allora $\alpha^{s_1} \cap \Omega_i = \emptyset$, in contraddizione col fatto che da $\alpha \in g\Omega_i$ segue l'esistenza di $s_2 \in S$, con $\alpha^{s_2} \in \Omega_i$ (e quindi $\alpha^{s_2 s_1} \in \Omega_i$).

3. SULLA RAPPRESENTAZIONE DI UN SEMIGRUPPO FINITO MEDIANTE UN SEMIGRUPPO DI TRASFORMAZIONI

Sia S_0 un arbitrario semigruppo finito. Possiamo supporre, per semplicità di esposizione, che S_0 sia dotato di *identità* e ; in tal modo si evita la considerazione di $S_0 \cup \{e\}$, e si ha direttamente una rappresentazione di S_0 mediante un semigruppo S di trasformazioni di $X = S_0$ in sè (S è il cayleyano *destro* di S_0).

È facile verificare che ad ogni ideale *destro* Γ_0 di S_0 corrisponde, nell'isomorfismo, un insieme $\Gamma \subseteq X$, invariante rispetto ad S . Allora l'insieme degli ideali destri *minimali* di S_0 corrisponde all'insieme delle orbitoidi di S su X .

Se S_0 è un gruppo, l'unico ideale destro è S_0 stesso: allora, se $\Gamma \subseteq X$ è invariante rispetto ad S , per l'isomorfismo si ha necessariamente $\Gamma = X = S_0$. Si ritrova così il noto risultato che, nella rappresentazione di Cayley di un gruppo finito mediante un gruppo S di permutazioni, S è *transitivo*.

Dal Corollario 1 segue che, dato un sottoinsieme invariante $\Gamma \subseteq X$, esso risulta non assorbente se e solo se anche $X \setminus \Gamma$ è invariante. Per il Teorema 3 si può quindi enunciare:

TEOREMA 5. *L'insieme degli ideali destri minimali del semigruppo S_0 costituisce una partizione di $S_0 \setminus \{e\}$ se e solo se il complementare in $S_0 \setminus \{e\}$ di qualunque ideale destro è anche esso un ideale destro.*

L'ultima condizione scritta implica evidentemente che ogni ideale destro Γ_0 è *semiprimo* (cioè da $a^2 \in \Gamma_0$ segue $a \in \Gamma_0$). Ricordiamo inoltre che un semigruppo si dice *semplice a destra* se è privo di ideali destri propri.

Queste osservazioni mettono in luce la stretta parentela del Teorema 5 con il seguente noto risultato (cfr. [1], p. 123): un semigruppo (finito o no) è unione disgiunta di sottosemigruppi semplici a destra se e solo se ogni ideale destro è semiprimo.

4. CICLI DI UNA TRASFORMAZIONE

Sia s un'arbitraria trasformazione di un insieme finito X in sè. È noto (cfr. ad esempio [2]) che s si può rappresentare come « prodotto » di cicli (generalizzati) disgiunti. Essi sono le classi di equivalenza della relazione così

definita in X : si ha $\alpha \equiv \beta$ se $\alpha = \beta$, oppure se $\alpha \neq \beta$ ed esistono $k, h \in \mathbb{N}$ tali che, posto $t = s^k$, $u = s^h$, risulta

$$(2) \quad \alpha^t = \beta^u.$$

Questi cicli generalizzati si dicono anche componenti (connesse) di s , e possono essere così costruiti: si fissa un elemento arbitrario $\alpha_1 \in X$, e si considerano successivamente $\alpha_2 = \alpha_1^s$, $\alpha_3 = \alpha_2^s$, e così via, fino a quando si ottiene un α_k la cui immagine α_k^s è uno dei k elementi già considerati; si definisce allora (provvisoriamente) la prima componente

$$\Lambda_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}.$$

Partendo ora con un elemento arbitrario $\alpha_{k+1} \in X \setminus \Lambda_1$, si procede come prima, fino ad ottenere α_{k+j} , con

$$\alpha_{k+j}^s \in \Lambda_1 \cup \{\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{k+j}\};$$

se $\alpha_{k+j}^s \in \{\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{k+j}\}$, definiamo la seconda componente

$$\Lambda_2 = \{\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{k+j}\}$$

e ripetiamo il procedimento, scegliendo un elemento α_{k+j+1} di $X \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$. Se invece $\alpha_{k+j}^s \in \Lambda_1$, aggiungiamo a Λ_1 gli elementi ottenuti, cioè definiamo come prima componente

$$\Lambda'_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+j}\}$$

ed iniziamo nuovamente la costruzione di Λ_2 .

In altre parole, ogni volta che si fissa un nuovo elemento di partenza, esso genera una successione di elementi di X , la quale o « ritorna su sé stessa » (dando luogo così ad una nuova componente) o finisce in una componente già esistente, alla quale, in tal caso, vengono aggiunti tutti gli elementi della successione. Questo processo continua fino a quando si esaurisce l'insieme X .

Se si associa ad s il grafo G avente X come insieme dei vertici e come archi i lati orientati congiungenti α ed α^s (per ogni $\alpha \in X$), la precedente rappresentazione di s corrisponde, com'è noto, alla decomposizione di G in componenti connesse. È chiaro che ognuna di queste componenti è costituita da un *ciclo* (o cammino chiuso) e da un certo numero di « alberi » che arrivano in vertici del ciclo (si tratta quindi di un « ciclo generalizzato »).

Sia ora $\langle s \rangle = \{s, s^2, s^3, \dots, s^p\}$ il semigruppato ciclico generato da s . Poiché $\langle s \rangle$ è commutativo, vale il Teorema 4; pertanto, detto $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ l'insieme delle orbitoidi di $\langle s \rangle$ su X , si ha

$$(3) \quad X = \bigcup_{i=1}^m gC_i, \quad gC_i \cap gC_j = \emptyset \quad \text{per } i \neq j,$$

ed inoltre $gC_i \supseteq C_i$ (per il Teorema 2).

Proviamo che gli insiemi gC_i e C_i sono rispettivamente le componenti ed i cicli di s :

TEOREMA 6. *Sia s una trasformazione di un insieme finito X in sè. Si ha: (i) la partizione di X in classi di equivalenza definite dalla (2) coincide con la partizione (3); (ii) il ciclo contenuto in ciascuna componente gC_i ($i = 1, 2, \dots, m$) è l'orbitoide C_i corrispondente.*

Dimostrazione. (i) Siano $\alpha, \beta \in gC_i$, con $\alpha \neq \beta$; esistono allora $s_1, s_2 \in \langle s \rangle$ (sia $s_1 = s^{n_1}$, $s_2 = s^{n_2}$, con $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$) tali che $\alpha^{s_1} \in C_i$ e $\beta^{s_2} \in C_i$. Poiché C_i è totalmente monogenico, esiste $s_3 \in \langle s \rangle$ (sia $s_3 = s^{n_3}$) tale che $\alpha^{s_1 s_3} = \beta^{s_2}$, e quindi vale la (2) con $k = n_1 + n_3$, $h = n_2$ cioè $\alpha = \beta$. Sia ora $\gamma \equiv \alpha$, con $\gamma \neq \alpha$; esistono $m_1, m_2 \in \mathbf{N}$ tali che, posto $t_1 = s^{m_1}$, $t_2 = s^{m_2}$, si ha $\alpha^{t_1} = \gamma^{t_2}$. Poniamo

$$u = \begin{cases} s^{n_1 - m_1}, & \text{se } n_1 > m_1 \\ s^{m_1 - n_1}, & \text{se } n_1 \leq m_1. \end{cases}$$

Nel primo caso si può scrivere

$$\alpha^{t_1 u} = \alpha^{s_1} = \gamma^{t_2 u},$$

e quindi $\gamma^{t_2 u} \in C_i$, cioè $\gamma \in gC_i$; analogamente, nel secondo caso si ha

$$\alpha^{s_1 u} = \alpha^{t_1} = \gamma^{t_2},$$

ed essendo $\alpha^{s_1 u} \in C_i$ si ottiene ancora $\gamma \in gC_i$.

(ii) Se α è un *qualunque* vertice del ciclo contenuto in gC_i , tale ciclo è l'insieme $\alpha^{(s)}$; ma allora, per il Teorema 1, esso coincide con un'orbitoide, e dai Teoremi 2 e 4 segue $\alpha^{(s)} = C_i$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. H. CLIFFORD e G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, « Amer. Math. Soc. », I, Providence 1961.
- [2] J. DÉNES, *Connections between transformation semigroups and graphs*, « Actes des Journées Internationales d'étude sur la théorie des graphes », 298–303, Rome 1966.
- [3] R. SCOZZAFAVA, *Graphs and finite transformation semigroups*, « Discrete mathematics », 5, 87–99 (1973).
- [4] R. SCOZZAFAVA, *Semigrupper primitivi*, « Boll. Un. Mat. It. », 6 (4), 242–247 (1972).
- [5] R. SCOZZAFAVA, *Minimal subautomata and admissible subsets of a finite automaton*, « Rapporto Interno Istituto Matematico 'U. Dini' », Firenze 1972/n. 26 (sottoposto per la pubblicazione su « Mathematical Systems Theory »).
- [6] R. SCOZZAFAVA, *Combinatorial configurations generated by finite semigroups*, Atti del « Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie » (Accademia dei Lincei, American Mathematical Society), Roma 1973 (in corso di stampa).