Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Erminia Marina

Un problema al contorno di tipo misto per un operatore ellittico che può degenerare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.3-4, p. 149–160.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_3-4_149_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1973 (Settembre–Ottobre)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Un problema al contorno di tipo misto per un operatore ellittico che può degenerare* (*). Nota (**) di MARIA ERMINIA MARINA, presentata dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — I study mixed boundary value problems for a degenerate elliptic operator.

INTRODUZIONE

La teoria degli operatori ellittici del secondo ordine a coefficienti discontinui e di tipo variazionale è stata studiata da parecchi Autori. In particolare in [2] sono stati esaurientemente affrontati il problema di Dirichlet e il problema di Neumann per equazioni ellittiche che possono degenerare. Qui si considera un problema di tipo misto che nel caso uniformemente ellittico è stato studiato da M. Chicco [1].

Sia Ω un insieme aperto e limitato di $\mathbf{R}^n$, $(n > 2)$, $\partial\Omega$ la sua frontiera, η il versore della normale a $\partial\Omega$ orientata verso l'esterno, Γ_0 un sottoinsieme chiuso di $\partial\Omega$ e $\Gamma_1 = \partial\Omega - \Gamma_0$.

Sia $m(x)$ una funzione non negativa definita in $\bar{\Omega}$ tale che $m(x) \in L^\infty(\Omega)$, $m^{-1}(x) \in L^t(\Omega)$, $(t \geq n/2)$. Siano $H^1(\Omega, m)$ e $H_0^1(\Omega, m)$ gli spazi ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$ e $C_0^1(\bar{\Omega})$ secondo la norma

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega,m)} = \| u \|^2_{2,\Omega} + \| u_x \|^2_{m,2,\Omega},$$

essendo

$$\| u \|^2_{2,\Omega} = \int_\Omega u^2 \, dx \quad \text{e} \quad \| u_x \|^2_{m,2,\Omega} = \left(\sum_1^n \int_\Omega (u_{x_i} \, m^{1/2})^2 \, dx \right).$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1973.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.

Posto $\tilde{C}_1(\overline{\Omega}) = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ su } \Gamma_0\}$, indichiamo con V la chiusura di $\tilde{C}_1(\overline{\Omega})$ in $H^1(\Omega, m)$. Se $u \in H^1(\Omega, m)$, $k \geq 0$, $B \subset \overline{\Omega}$, diciamo che $u \geq k$ $(u \leq k)$ in B nel senso di $H^1(\Omega, m)$ se esiste una successione $\{u_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ di funzioni appartenenti a $C_1(\overline{\Omega})$ tali che $u_j \geq k$ $(u_j \leq k)$ su B e $\| u_j - u \|_{H^1(\Omega, m)} \to 0$.

Indichiamo con

$$\max_B u = \inf \{k \in \mathbf{R} : u \leq k \text{ su B nel senso di } H^1(\Omega, m)\}.$$

Consideriamo un operatore L del secondo ordine in forma di divergenza tale che

$$Lu = -(a_{ij} u_{x_i} + d_j u)_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu), \qquad (i, j = 1, \cdots, n)\ ^{(1)}$$

i cui coefficienti soddisfano alle seguenti ipotesi:

$$\text{(0.1)} \qquad \begin{cases} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq m(x) \,|\, \xi \,|^2 \quad \text{q.o. in } \Omega \text{ per ogni } \quad \xi \in \mathbf{R}^n, \\ a_{ij} m^{-1}(x) \in L^\infty(\Omega), \\ b_i m^{-1/2}, d_i m^{-1/2} \in L^{2q}(\Omega), \\ c \in L^q(\Omega), \end{cases}$$

essendo $q \geq 1$ il numero tale che $1/2q = 1/n - 1/2t$.

Scopo del presente lavoro è risolvere il seguente problema (formalmente):

$$\text{(0.2)} \qquad \begin{cases} Lu = f + (f_i)_{x_i} \quad \text{in } \Omega \\ u = \psi \quad \text{su } \Gamma_0 \\ a_{ij} u_{x_i} \cos(\eta\, x_j) + eu = h \quad \text{su } \Gamma_1. \end{cases}$$

Nel Paragrafo 1 affronteremo il caso in cui i dati iniziali sono nulli, nel Paragrafo 2 il caso generale – vedi Teoremi (2.2), (2.3), (2.4) –.

§ 1. In questo paragrafo aggiungiamo alle ipotesi (0.1) le seguenti

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \partial\Omega \text{ sia localmente lipschitziana} \\ g = e - d_i \cos(\eta x_i) \in L^{(n-1)(1-n/t)^{-1}}(\Gamma_1). \end{cases}$$

Ci è utile richiamare i seguenti Lemmi, la cui dimostrazione si trova in [2], pag. 16–23.

LEMMA (1.1). *Sia* $u \in H^1(\Omega, m)$ *e* $2^{\#}$ *il numero così definito*: $(2^{\#})^{-1} = 2^{-1}(1 + 1/t) - n^{-1}$. *Allora esiste una costante* $S = S(n, t, \Omega)$ *tale che*

$$\| u \|_{2^{\#}, \Omega} \leq S \,\| u \|_{H^1(\Omega, m)}.$$

(1) Il simbolo di sommatoria è sempre sottinteso.

LEMMA (1.2). *Sia* $u \in H^1(\Omega, m)$. *Allora esiste un'unica applicazione lineare e continua* $\gamma_0 : H^1(\Omega, m) \to L^s(\partial\Omega)$ *dove* $s = 2(n-1)(n-2+n/t)^{-1}$, *tale che* $\gamma_0 u = u/\partial\Omega$ *per ogni* $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Consideriamo la seguente forma bilineare su $H^1(\Omega, m) \times V$

$$a(u, v) = \int_\Omega [(a_{ij} u_{x_i} + d_j u) v_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu) v] \, dx + \int_{\Gamma_1} [g(\gamma_0 u)(\gamma_0 v)] \, d\sigma .$$

Dalle ipotesi fatte $a(u, v)$ risulta continua su $H^1(\Omega, m) \times V$; inoltre si riconosce che il problema (formalmente)

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ a_{ij} u_{x_i} \cos(\eta x_j) + eu = 0 & \text{su } \Gamma_1 \end{cases}$$

si traduce in forma debole nel seguente:

$$\begin{cases} a(u, v) = 0 & \text{per ogni } v \in V \\ u \in V . \end{cases} \tag{1.2}$$

Supponiamo poi che esista $\alpha \in \mathbf{R}^+$ tale che

$$\int_\Omega (d_i v_{x_i} + cv) \, dx + \int_{\Gamma_1} g(\gamma_0 v) \, d\sigma \geq \alpha \int_\Omega v \, dx \quad \text{per ogni } v \in \tilde{C}^1(\overline{\Omega}), \, v \geq 0 . \tag{1.3}$$

Vogliamo dimostrare che se $u \in V$ è soluzione di (1.2) allora $u \equiv 0$. A tal scopo basta far vedere che sussiste il seguente Teorema.

TEOREMA (1.1). *Supponiamo valgano le ipotesi fin qui dette. Sia* $u \in H^1(\Omega, m)$ *tale che* $a(u, v) \leq 0$, *per ogni* $v \in V$, $v \geq 0$. *Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max(0, \max_{\Gamma_0} u) .$$

Per dimostrare il Teorema abbiamo bisogno di alcuni Lemmi preliminari.

LEMMA (1.3). *Sia* $k \geq 0$; *risulta*

$$a(-k, \varphi) \leq 0 \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in \tilde{C}^1(\overline{\Omega}), \, \varphi \geq 0 .$$

Dimostrazione. Basta osservare che dalla (1.3) risulta

$$a(-k, \varphi) = -k \left[\int_\Omega (d_j \varphi_{x_j} + c\varphi) \, dx + \int_{\Gamma_1} g(\gamma_0 \varphi) \, d\sigma \right] \leq 0. \quad \text{C.V.D.}$$

LEMMA (1.4). *Sia* $g(t)$ *una funzione uniformemente lipschitziana su* $\mathbf{R}$. *Sussistono le seguenti proprietà*:

a) *se* $g(0) = 0$ *allora per ogni* $u \in V$ $gu = g \circ u \in V$;

b) *se* $g(t) = 0$ *per ogni* $t \leq d$, *allora per ogni* $u \in H^1(\Omega, m)$ *tale che* $\max_{\Gamma_0} u \leq d$ *risulta* $g \circ u \in V$.

Dimostrazione. Salvo poche varianti è la stessa di [2]. Proposizioni (2.7) e (2.9).

LEMMA (1.5). *Se risulta* $\min(1, \alpha) - S \| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2q,\Omega} > 0$ *allora* $a(u, v)$ *è coerciva su* V.

Dimostrazione. Osserviamo che dalle (1.3) risulta

$$\int_\Omega (2 d_i u u_{x_i} + c u^2) \, dx + \int_{\Gamma_1} g \gamma_0 (u^2) \, d\sigma \geq \alpha \int_\Omega u^2 \, dx, \quad \text{per ogni } u \in \vec{C}^1(\overline{\Omega}).$$

Tenute presenti le ipotesi fatte, il Lemma (1.1) e applicando la disuguaglianza di Hölder perveniamo allora alle disuguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_\Omega [a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + d_j u u_{x_j} + b_i u u_{x_i} + c u^2] \, dx + \int_{\Gamma_1} g \gamma_0 (u^2) \, d\sigma \geq \\ &\geq \int_\Omega [a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + (b_i - d_i) u_{x_i} u + \alpha u^2] \, dx \geq \\ &\geq \| u_x \|^2_{m,2,\Omega} - \| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2q,\Omega} \| u \|_{2^*,\Omega} \| u_x \|_{m,2,\Omega} + \\ &+ \alpha \| u \|^2_{2,\Omega} \geq (\min(1, \alpha) - S \| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2q,\Omega}) \| u \|^2_V . \qquad \text{C.V.D.} \end{aligned}$$

LEMMA (1.6). *Siano* $u_1, u_2 \in H^1(\Omega, m)$ *tali che* $a(u_i, v) \leq 0$ *per ogni* $v \in V$, $v \geq 0$ $(i = 1, 2)$. *Allora posto* $w = \max(u_1, u_2)$ *si ha* $a(w, v) \leq 0$ *per ogni* $v \in V$, $v \geq 0$.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che la forma $a(u, v)$ sia coerciva su $V \times V$. (Ciò è possibile se per esempio la misura di Ω è piccola – vedi Lemma 1.5).

In tal caso si può dimostrare con un ragionamento del tutto analogo a quello del Lemma (6.6) di [2] che w è una sottosoluzione, cioè $a(w, v) \leq 0$ per ogni $v \in V$, $v \geq 0$.

Supponiamo allora che $a(u, v)$ non sia coerciva su $V \times V$. Consideriamo un ricoprimento aperto finito $\{\Omega_s\}$ di $\overline{\Omega}$ tale che

$$\min(1, \alpha) - S \| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2q,\Omega_s} > 0 \quad \text{per ogni } s .$$

Posto $V(\Omega_s) = \{ u \in H^1(\Omega_s \cap \Omega), u(x) = 0$ su $\partial(\Omega_s \cap \Omega) - \Gamma_1$ nel senso di $H^1(\Omega, m)\}$ dal Lemma (1.5) segue che $a(u, v)$ è coerciva su $V(\Omega_s) \times V(\Omega_s)$. Sia $\{\alpha_s\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{\Omega_s\}$ cioè $\alpha_s \in C^1_0(\Omega_s)$ e $\sum_s \alpha_s = 1$ su $\overline{\Omega}$. Per quanto dimostrato prima risulta $a(w, v) \leq 0$ per ogni $v \in V(\Omega_s)$, $v \geq 0$. Se osserviamo che per ogni $\varphi \in V$, $\varphi \geq 0$, $\alpha_{s/\Omega} \varphi \in V(\Omega_s)$ per ogni s, otteniamo che $a(w, \alpha_s \varphi) \leq 0$ e quindi $\sum_s a(w, \alpha_s \varphi) = a(w, \varphi) \leq 0$. C.V.D.

Dimostrazione del Teorema (1.1). Supponiamo per assurdo che $\max_{\overline{\Omega}} u > \max(0, \max_{\Gamma_0} u)$. Indichiamo con $M = \max_{\overline{\Omega}} u$, $m = \max(0, \max_{\Gamma_0} u)$. Consideriamo dapprima il caso in cui $M < +\infty$.

Sia $k \in (m, M)$ e $v = \max(u - k, 0)$. Per i Lemmi (1.4) e (1.6) risulta $v \in V$ e $a(v, \varphi) \leq 0$ per ogni $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^1(\overline{\Omega})$, $\varphi \geq 0$. Osserviamo che se $p \geq 2$, $v^p \in V$ e $v^{p-1}\varphi \in V$ per ogni $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^1(\overline{\Omega})$, $\varphi \geq 0$. Tenute presenti le ipotesi fatte segue:

$$0 \geq a(v, pv^{p-1}\varphi) = \int_\Omega [a_{ij}(v^p)_{x_i}\varphi_{x_j} + (b_i - d_i)(v^p)_{x_i}\varphi +$$

$$+ p(c - (d_j)_{x_j})v^p\varphi]\,dx + \int_{\Gamma_1} [(g + d_j\cos(\eta x_j))(\gamma_0 v^p)(\gamma_0\varphi)]\,d\sigma +$$

$$+ p(p-1)\int_\Omega (a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}v^{p-2}\varphi)\,dx \geq \int_\Omega [a_{ij}(v^p)_{x_i}\varphi_{x_j} +$$

$$+ (b_i - d_i)(v^p)_{x_i}\varphi + p\alpha(v^p)\varphi]\,dx.$$

Poniamo

$$b_p(w, \varphi) = \int_\Omega [a_{ij}w_{x_i}\varphi_{x_j} + (b_i - d_i)w_{x_i}\varphi + p\alpha w\varphi]\,dx\,;$$

osserviamo che $b_p(w, \varphi)$ è una forma lineare e continua su $V \times V$. Inoltre dalla Proposizione (4.6), pag. 32 di [2] risulta che $b_p(w, \varphi)$ è una forma coerciva su $V \times V$ se p è sufficientemente grande. Si deduce allora che esiste $\bar{p} \geq 2$ tale che per ogni $p > \bar{p}$, $v^p = 0$; questo implica che $\max_{\overline{\Omega}} u < M$, assurdo.

Supponiamo allora che $M = +\infty$. Per ogni $k \in (m, +\infty)$ poniamo $v_k = \max(u - k, 0)$, $E(k) = \{x \in \overline{\Omega} : u(x) \geq k\}$ e $\Omega(k) = \Omega \cap E(k)$. Risulta $v_k = 0$ in $\overline{\Omega} - E(k)$, $(v_k)_{x_i} = u_{x_i}$ quasi ovunque in $\Omega(k)$. Dalla (1.3) e dal Lemma (1.4) segue:

$$0 \geq a(u, v_k) = \int_\Omega [(a_{ij}u_{x_i} + d_j u)(v_k)_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu)v_k]\,dx +$$

$$\int_{\Gamma_1} g(\gamma_0 u)(\gamma_0 v_k) = \int_{\Omega(k)} [a_{ij}(v_k)_{x_i}(v_k)_{x_j} + d_j v_k (v_k)_{x_j} +$$

$$+ b_i(v_k)_{x_i}v_k + cv_k^2]\,dx + \int_{\Gamma_1 \cap E(k)} g(\gamma_0 v_k)^2\,d\sigma +$$

$$+ k\left\{\int_{\Omega(k)} [d_j(v_k)_{x_j} + cv_k]\,dx + \int_{\Gamma_1 \cap E(k)} g(\gamma_0 v_k)\,d\sigma\right\} \geq$$

$$\geq \int_{\Omega(k)} [a_{ij}(v_k)_{x_i}(v_k)_{x_j} + (b_i - d_i)v_k(v_k)_{x_i} + \alpha v_k^2]\,dx\,.$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder alla relazione precedente si ottiene:

$$\|(v_k)_x\|^2_{m,2,\Omega(k)} + \alpha\|v_k\|^2_{2,\Omega(k)} \leq \|(b_i - d_i)m^{-1/2}\|_{2q,\Omega(k)}\|(v_k)_x\|_{m,2,\Omega(k)}\|v_k\|_{2^\#,\Omega(k)}$$

ovvero:

$$\min(1, \alpha)\|v_k\|^2_V \leq S\|(b_i - d_i)m^{-1/2}\|_{2q,\Omega(k)}\|v_k\|^2_V\,.$$

Facciamo ora tendere k a $+\infty$. Osservato che risulta per ogni $k > 0$

$$(1.4) \qquad | \Omega(k) | \leq \frac{\| u \|_{2,\Omega}^2}{k^2} \text{ (2)}$$

e quindi

$$\lim_{k \to +\infty} \| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2q, \Omega(k)} = 0 ,$$

otteniamo che $\| v_k \|_V = 0$ per qualche k abbastanza grande, assurdo. C.V.D.

È immediata conseguenza del Teorema precedente il seguente Teorema.

TEOREMA (1.2). *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema* (1.1). *Se* $u \in V$ *è soluzione del problema* (1.2) *allora* $u \equiv 0$.

§ 2. Supponiamo che valgano le ipotesi (0.1), (1.1) e (1.3); siano date $f \in L^2(\Omega)$, $f_i m^{-1/2} \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \cdots, n$, $h \in L^r(\Omega)$ ove $r = 2(n-1) \cdot \cdot n^{-1}(1 - 1/t)^{-1}$.

Consideriamo il problema (formalmente)

$$\begin{cases} Lu = f + (f_i)_{x_i} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_0 \\ a_{ij} u_{x_i} \cos(\eta x_j) + eu = h & \text{su } \Gamma_1 \end{cases}$$

e osserviamo che il precedente problema si traduce in forma debole nel seguente

$$(2.1) \qquad \begin{cases} u \in V \\ a(u, v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Omega f_i v_{x_i} \, dx + \int_{\Gamma_1} h (\gamma_0 v) \, d\sigma \quad \text{per ogni } v \in V. \end{cases}$$

Sussiste il Teorema

TEOREMA (2.1). *Nelle ipotesi fatte esiste una e una sola soluzione del problema* (2.1).

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbf{R}^+$ e $a_\lambda(u, v)$ la seguente forma bilineare su $V \times V$

$$a_\lambda(u, v) = a(u, v) + \lambda(u, v) .$$

Tenuto conto di (1.3) risulta

$$a_\lambda(u, u) \geq \int_\Omega [a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + (b_i - d_i) u_{x_i} u + \lambda u^2] \, dx .$$

Per la Proposizione (4.6), pag. 32 di [2] esiste una costante k e un $\lambda_0 > 0$ tale che per ogni $\lambda > \lambda_0$ $a_\lambda(u, u) \geq k \| u \|_V^2$.

(2) Per ogni insieme $E \subseteq$ misurabile denoteremo con $| E |$ la sua misura di Lebesgue.

Ne segue (vedi § 5 di [2]) che il problema (2.1) si inquadra nella teoria di Riesz–Fredholm; cioè esiste una e una sola soluzione di (2.1) se e solo se (1.2) ha soltanto la soluzione nulla. C.V.D.

Sia dato $\psi \in H^1(\Omega, m)$. Il problema (0.2) si traduce in forma debole nel seguente

$$(2.2)\quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega, m) \\ a(u, \varphi) = \int\limits_{\Omega} f\varphi \, dx + \int\limits_{\Omega} f_i \varphi_{x_i} \, dx + \int\limits_{\Gamma_1} h(\gamma_0 \varphi) \, d\sigma \quad \text{per ogni } \varphi \in V \\ u - \psi \in V . \end{cases}$$

TEOREMA (2.2). *Nelle ipotesi fatte esiste una e una sola soluzione del problema* (2.2).

Dimostrazione. Osserviamo che l'applicazione lineare $V \ni \varphi \mapsto a(\psi, \varphi) \in \mathbf{R}$ definisce un elemento di V' e quindi può essere rappresentato nella forma

$$\varphi \to \int\limits_{\Omega} g\varphi \, dx + \int\limits_{\Omega} g_i \varphi_{x_i} \, dx, \quad \text{essendo } g \in L^2(\Omega), \; g_i m^{-1/2} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \cdots, n$$

(vedi [2]).

Allora, come nel Teorema (2.1) possiamo asserire che esiste un'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} v \in V \\ a(v, \varphi) = \int\limits_{\Omega} f \varphi \, dx + \int\limits_{\Omega} f_i \varphi_{x_i} \, dx + \int\limits_{\Gamma_1} h(\gamma_0 \varphi) \, d\sigma - a(\psi, \varphi). \end{cases}$$

Posto $u = v + \psi$, risulta $a(u, \varphi) = a(v, \varphi) + a(\psi, \varphi)$. Ne segue che u è l'unica soluzione di (2.2). C.V.D.

Vogliamo ora dimostrare che sotto certe ipotesi le soluzioni di taluni problemi precedenti appartengono a spazi $L^p(\Omega)$ con $p > 2^{\#}$. A tale scopo ci è utile richiamare un Lemma la cui dimostrazione si trova in [4] e [5].

LEMMA (2.1). *Sia $\mu(h)$ una funzione non negativa, non crescente, definita sulla semiretta reale $t \geq k_0 \geq 0$.*

Se esistono $C, \delta, \beta \in \mathbf{R}^+$ tali che

$$(2.3)\qquad \mu(h) \leq C(h-k)^{-\delta} \mu(k)^{\beta} \quad \textit{per ogni} \quad h \geq k \geq k_0 ,$$

sussistono le seguenti relazioni:

a) *se* $\beta > 1 \Rightarrow \mu(k_0 + d) = 0$ *essendo* $d = C^{1/\delta} \mu(k_0)^{(\beta-1)/\delta} \, 2^{\beta/(\beta-1)}$;

b) *se* $\beta = 1 \Rightarrow \mu(h) \leq \mu(k_0) \exp(1 - \rho(h - k_0))$, *essendo* $\rho = (eC)^{-1/\delta}$;

c) *se* $\beta < 1 \Rightarrow \mu(h) \leq 2^{\delta/(1-\beta)^2} \{C^{1/(1-\beta)} + (2\,k_0)^{\delta/(1-\beta)} \mu(k_0)\} \, h^{-\delta/(1-\beta)}$.

TEOREMA (2.3). *Supponiamo che valgano le ipotesi* (0.1), (1.1) *e* (1.3); *sia* $t > n/2$, $f \in L^p(\Omega)$ $(p \geq 2)$, *e* u *la soluzione del problema*

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_\Omega fv \, dx & \textit{per ogni} \quad v \in V. \\ u \in V. \end{cases}$$

Allora:

a) *se* $p > \frac{2tn}{2t-n}$, $u \in L^\infty(\Omega)$,

b) *se* $p = \frac{2tn}{2t-n}$, $u \in L^r(\Omega)$ *per ogni* $r \geq 1$;

c) *se* $p < \frac{2tn}{2t-n}$, $u \in M(a(p))$ *cioè*

$$|\{x \in \Omega : |u(x)| \geq h\}| \leq C h^{-a(p)}$$

essendo $a(p)$ *il numero tale che* $a(p)^{-1} = (2^\#)^{-1} - (2)^{-1} + (p)^{-1}$ *e* C *una costante dipendente dai dati del problema.*

Dimostrazione. Sia $k > 0$; posto $v_k = (\operatorname{sign} u) \max\{|u| - k, 0\}$, dal Lemma (1.4) risulta $v_k \in V$. Indichiamo con $E(k) = \{x \in \overline{\Omega} : |u(x)| \geq k\}$ e con $\Omega(k) = \Omega \cap E(k)$. Tenute presenti la (1.3) e la disuguaglianza di Hölder si ottiene:

$$\int_\Omega f v_k \, dx = a(u, v_k) = \int_{\Omega(k)} [a_{ij}(v_k)_{x_i}(v_k)_{x_j} + d_j v_k (v_k)_{x_j} +$$

$$+ b_i (v_k)_{x_i} v_k + c(v_k)^2] \, dx + \int_{\Gamma_1 \cap E(k)} g(\gamma_0 v_k)^2 \, d\sigma +$$

$$+ k(\operatorname{sign} v_k) \left\{ \int_{\Omega(k)} [d_j (v_k)_{x_j} + c v_k] \, dx + \int_{\Gamma_1 \cap E(k)} g(\gamma_0 v_k) \, d\sigma \right\} \geq$$

$$\geq \int_{\Omega(k)} [a_{ij}(v_k)_{x_i}(v_k)_{x_j} + (b_i - d_i) v_k (v_k)_{x_i} + \alpha (v_k)^2] \, dx \geq$$

$$\geq \|(v_k)_x\|^2_{m,2,\Omega(k)} - S \|(b_i - d_i) m^{-1/2}\|_{2q,\Omega(k)} \|v_k\|^2_V + \alpha \|v_k\|^2_{2,\Omega(k)} \cdot$$

$$\cdot (\min(1, \alpha) - S \|(b_i - d_i) m^{-1/2}\|_{2q,\Omega(k)}) \|v_k\|^2_V \cdot$$

Osserviamo che la funzione $k \mapsto |\Omega(k)|$ è monotona non crescente e inoltre $\lim_{k \to +\infty} |\Omega(k)| = 0$. Si deduce allora che esiste $k_0 \geq 0$ tale che:

$$\min(1, \alpha) - S \|(b_i - d_i) m^{-1/2}\|_{2q,\Omega(k)} > 0, \qquad \text{per ogni} \quad k \geq k_0 .$$

Dalle disuguaglianze precedenti segue allora:

$$\|v_k\|_V \leq \frac{\|f\|_{2,\Omega(k)}}{\min(1, \alpha) - S \|(b_i - d_i) m^{-1/2}\|_{2q,\Omega(k_0)}} \quad \text{per ogni } k \geq k_0 .$$

Tenuto conto che

$$(2.4)\qquad (h-k)\,|\,\Omega(h)\,|^{1/2^{\#}} = \|\, h-k \,\|_{2^{\#},\Omega(h)} \leq \|\, v_k \,\|_{2^{\#},\Omega(h)} \leq \|\, v_k \,\|_{2^{\#},\Omega(k)}$$

per ogni $h \geq k \geq k_0$, si ottiene allora:

$$|\,\Omega(h)\,| \leq \left[\frac{\|f\|_{p,\Omega}\, S}{\min(1\,,\alpha) - S\,\|\,(b_i - d_i)\, m^{-1/2}\,\|_{2q,\Omega(k_0)}}\right]^{2^{\#}} (h-k)^{-2^{\#}}\,|\,\Omega(k)\,|^{(1/2-1/p)\,2^{\#}}\,.$$

Poniamo

$$C = \left[\frac{\|f\|_{p,\Omega}\, S}{\min(1\,,\alpha) - S\,\|\,(b_i - d_i)\, m^{-1/2}\,\|_{2q,\Omega(k_0)}}\right]^{2^{\#}}, \quad \beta = (1/2 - 1/p)\, 2^{\#}, \quad \delta = 2^{\#};$$

chiaramente la funzione $h \mapsto |\,\Omega(h)\,|$ verifica la (2.3); dal Lemma (2.1) si ottiene allora quanto segue:

a) Sia $\beta > 1$, cioè $p > \dfrac{2\,tn}{2\,t-n}$; risulta

$$(2.5)\qquad \|\, u \,\|_{\infty,\Omega} \leq k_0 + d$$

essendo $d = C^{1/\delta}\,|\,\Omega(k_0)\,|^{\beta-1/\delta}\, 2^{\beta(\beta-1)}$.

b) Sia $\beta = 1$, cioè $p = \dfrac{2\,tn}{2\,t-n}$; posto $\rho = (eC)^{-1/\delta}$, segue che

$$|\,\Omega(h)\,| \leq e\,|\,\Omega(k_0)\,|\, e^{-\rho(h-k_0)} \qquad \text{per ogni} \quad h \geq k_0\,;$$

quindi per ogni $\theta \in (0\,,\rho)$ risulta:

$$\int_\Omega e^{\theta|u|-k_0}\, dx = -\int_0^{+\infty} e^{\theta t-k_0}\, d\,|\,\Omega(t)\,| = -\,[e^{\theta t-k_0}\,|\,\Omega(t)\,|\,]_0^{+\infty} +$$

$$+\,\theta\int_0^{+\infty} e^{\theta t-k_0}\,|\,\Omega(t)\,|\, dt = e^{-k_0}\,|\,\Omega\,| + \theta\int_0^{k_0} e^{\theta t-k_0}\,|\,\Omega(t)\,|\, dt +$$

$$+\,\theta\int_{k_0}^{+\infty} e^{\theta t-k_0}\,|\,\Omega(t)\,|\, dt \leq e^{-k_0}|\,\Omega\,| + \theta\,|\,\Omega\,|\int_0^{k_0} e^{\theta t-k_0}\, dt +$$

$$+\,\theta\, e\,|\,\Omega\,|\int_{k_0}^{+\infty} e^{\theta t-k_0}\, e^{-\rho(t-k_0)}\, dt \leq e^{-k_0}\,|\,\Omega\,| + \theta\,|\,\Omega\,|\int_0^{k_0} e^{\theta t-k_0}\, dt +$$

$$+\,\theta\, e\,|\,\Omega\,|\, e^{k_0(\rho-1)}\int_0^{+\infty} e^{(\theta-\rho)\,t}\, dt < +\infty\,.$$

Si ottiene allora che:

$$(2.6)\qquad \int_\Omega e^{\theta|u|}\, dx < +\infty \quad \text{per ogni} \quad \theta \in (0\,,\rho)$$

e quindi $u \in L^r(\Omega)$ per ogni $r \geq 1$.

c) Sia $\beta < 1$ cioè $2 \leq p < \frac{2tn}{2t-n}$; risulta:

$$(2.7) \qquad |\Omega(h)| \leq 2^{\delta/(1-\beta)^2} \{C^{1/(1-\beta)} + (2k_0)^{\delta/(1-\beta)} |\Omega(k_0)|\} h^{-\delta/(1-\beta)}.$$

Se osserviamo che $(1-\beta)/\delta = (2^{\#})^{-1} - (2)^{-1} + (p)^{-1}$ la dimostrazione del Teorema risulta completata. C.V.D.

Osservazione. Se nel teorema precedente supponiamo che sussista l'ipotesi seguente

$$(2.8) \qquad \min(1, \alpha) - S \| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2q,\Omega} > 0,$$

allora la costante k_0 che compare nelle (2.5), (2.6) e (2.7) risulta uguale a zero. In tal caso queste maggiorazioni dipendono soltanto dalle norme $\| f \|_{p,\Omega}$ e $\| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2q,\Omega}$. Se supponiamo invece che non sussista l'ipotesi (2.8) ma risulti

$$\| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2\rho,\Omega} < +\infty, \qquad \text{con} \quad \rho > q$$

allora anche in questo caso si ottengono, grazie alla diseguaglianza di Hölder, alla (1.4) e al Teorema (1.2), delle maggiorazioni dipendenti solo dalle norme

$$\| f \|_{p,\Omega} \quad \text{e} \quad \| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2\rho,\Omega}.$$

TEOREMA (2.4). *Supponiamo valgano le ipotesi fatte nel Teorema* (2.3); *sia* $\psi \in H^1(\Omega, m)$ *tale che* $\max_{\Gamma_0} |\psi| < +\infty$, *e* v *la soluzione del problema*

$$\begin{cases} a(v, \varphi) = \int_\Omega f \varphi \, dx & \textit{per ogni} \quad \varphi \in V \\ v - \psi \in V. \end{cases}$$

Allora:

a) *se* $p > \frac{2tn}{2t-n}$, $v \in L^\infty(\Omega)$;

b) *se* $p = \frac{2tn}{2t-n}$, $v \in L^r(\Omega)$ *per ogni* $r \geq 1$;

c) *se* $2 \leq p < \frac{2tn}{2t-n}$, $v \in M(a(p))$, *essendo* $M(a(p))$ *definito come nel teorema* (2.3).

Dimostrazione. Sia $u \in V$ la soluzione del problema $a(u, \varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx$ per ogni $\varphi \in V$.

Posto $w = v - u$, $w \in H^1(\Omega, m)$ e $a(w, \varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in V$.

Dal Teorema (1.1) risulta:

$$(2.9) \qquad \max_{\overline{\Omega}} |w| \leq \max_{\Gamma_0} |w| = \max_{\Gamma_0} |\psi| < +\infty.$$

Ciò premesso, quanto segue è immediata conseguenza del Teorema (2.3):

a) Se $p > \frac{2tn}{2t-n}$, $u \in L^{\infty}(\Omega)$. Inoltre dalla (2.9) si deduce che

$$\max_{\bar\Omega} |v| \leq \max_{\bar\Omega} |w| + \max_{\bar\Omega} |u| \leq \max_{\Gamma_0} |\psi| + \max_{\bar\Omega} |u| < +\infty .$$

b) Se $p = \frac{2tn}{2t-n}$, $u \in L^r(\Omega)$ per ogni $r \geq 1$. Tenuto conto della (2.9) e del fatto che u verifica la (2.6) risulta $v \in L^r(\Omega)$ per ogni $r \geq 1$.

c) Se $2 \leq p < \frac{2tn}{2t-n}$, $u \in M(a(p))$ e quindi $v \in M(a(p))$. C.V.D.

Consideriamo ora il seguente problema

$$(2.10) \qquad \begin{cases} a(u, v) = \int_\Omega fv \, dx + \int_\Omega f_i v_{x_i} \, dx + \int_{\Gamma_1} h\gamma_0 v \, d\sigma & \text{per ogni } v \in V \\ u \in V , \end{cases}$$

essendo $f \in L^p(\Omega)$, $f_i m^{-1/p} \in L^p(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$, $p \geq 2$,
$h \in L^\nu(\Gamma_1)$, $\nu \geq 2(n-1) n^{-1}(1 - 1/t)^{-1}$.

Sia u la soluzione di (2.10), definiamo per ogni $k > 0$

$$E(k) = \{x \in \bar\Omega : |u(x)| > k\} \quad , \quad \Omega(k) = \Omega \cap E(k) \quad , \quad \Gamma_1(k) = \Gamma_1 \cap E(k) ,$$

$v_k = (\operatorname{sign} u) \max\{|u| - k, 0\}$. Tenuto presente il Lemma (1.2) e la dimostrazione del Teorema (2.3) si deduce che esiste una costante $k_0 > 0$ tale che

$$(2.11) \qquad \| v_k \|_V \leq \frac{\| f \|_{2,\Omega(k)} + \| f_i m^{-1/2} \|_{2,\Omega(k)} + \| h \|_{r,\Gamma_1(k)}}{\min(1, \alpha) - S \| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2q,\Omega(k_0)}} \quad \text{per ogni} \quad k \geq k_0 .$$

Se osserviamo che per ogni $h \geq k \geq k_0$

$$\| \gamma_0 v_k \|_{s,\Gamma_1(k)} \geq (h-k) [\Gamma_1(h)]^{1/s} \text{ (3)} ,$$

dai Lemmi (1.1), (1.2) e dalla (2.4) segue che esiste una costante C tale che

$$(h-k)^{2^\#} (|\Omega(h)| + [\Gamma_1(h)]^{2^\#/s}) \leq C \| v_k \|_V^{2^\#} \quad \text{per ogni} \quad h \geq k \geq k_0 .$$

Indichiamo con $\mu(h) = |\Omega(h)| + [\Gamma_1(h)]^{2^\#/s}$.

Dalla (2.11) si ricava, tenendo presente la disuguaglianza di Hölder

$$\mu(h) \leq \left\{ \frac{C}{\min(1, \alpha) - S \| (b_i - d_i) m^{-1/2} \|_{2q,\Omega(k_0)}} \right\}^{2^\#} (h-k)^{-2^\#} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \| f \|_{p,\Omega} |\Omega(k)|^{1/2-1/p} + \| f_i m^{-1/p} \|_{p,\Omega} \| m^{-1} \|_{t,\Omega}^{1/2-1/p} |\Omega(k)|^{(1/2-1/p)(1-1/t)} + \right.$$

(3) Indichiamo con [E] la misura di Lebesgue $(n-1)$ dimensionale dell' insieme E $\mathfrak{L}$ misurabile.

$$+ \| h \|_{\nu,\Gamma_1} [\Gamma_1(k)]^{1-1/s-1/\nu} \Big\}^{2^\#} \leq \frac{C^{2^\#}(h-k)^{-2^\#}}{(\min(1,\alpha) - S \| (b_i - d_i)\, m^{-1/2} \|_{2q,\Omega(k_0)})^{2^\#}} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ \| f \|_{p,\Omega}^{(2^\#)'} + \| f_i\, m^{-1/p} \|_{p,\Omega}^{(2^\#)'} \, \| m^{-1} \|_{t,\Omega}^{(1/2-1/p)(2^\#)'} + \| h \|_{\nu,\Gamma_1}^{(2^\#)'} \Big\}^{2^\#/(2^\#)'} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ | \Omega(k) |^{(1/2-1/p)2^\#} + | \Omega(k) |^{(1/2-1/p)(1-1/t)2^\#} + [\Gamma_1(k)]^{(1-1/s-1/\nu)2^\#} \Big\} \leq$$

$$\leq \frac{3^{((2^\#)'/2)'}\, C^{2^\#}(h-k)^{-2^\#}}{(\min(1,\alpha) - S \| (b_i - d_i)\, m^{-1/2} \|_{2q,\Omega(k_0)})^{2^\#}} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ \| f \|_{p,\Omega}^{2} + \| f_i\, m^{-1/p} \|_{p,\Omega}^{2} \, \| m^{-1} \|_{t,\Omega}^{(1/2-1/p)2} + \| h \|_{\nu,\Gamma_1}^{2} \Big\}^{2^\#/2} \cdot$$

$$\cdot\, \mu(k)^{\min\{(1/2-1/p)(1-1/t)2^\#,\,(1-1/s-1/\nu)s\}}.$$

Indichiamo con $\beta = \min\{(1/2 - 1/p)(1 - 1/t)\, 2^\#, (1 - 1/s - 1/\nu)\, s\}$ e osserviamo che $\beta < 1$ se $t \in [n/2, n]$. Applicando il Lemma (2.1) alla funzione $\mu(k)$ perveniamo ai Teoremi seguenti.

TEOREMA (2.5). *Supponiamo valgano le ipotesi fin qui dette. Se u è soluzione del problema* (2.10) *risulta* $u \in M(a(p,\nu))$, *cioè*

$$| \{ x \in \overline{\Omega} : | u(x) | > k \} | \leq C\, h^{-a(p,\nu)}$$

essendo C *una costante dipendente dai dati del problema e*

$$a(p,\nu)^{-1} = \max\{ 1/p^\# + 1/t\,(1 - 2/p),\ 1/2^\# - s/2^\#(1 - 1/s - 1/\nu)\}.$$

TEOREMA (2.6). *Supponiamo valgano le ipotesi del Teorema* (2.5) *e sia* $t > n$. *Allora*:

a) *se* $p > \dfrac{n(t-1)}{t-n}$ *e* $\nu > \dfrac{t(n-1)}{t-n}$ *allora* $u \in L^\infty(\Omega)$;

b) *se* $p = \dfrac{n(t-1)}{t-n}$ *e* $\nu = \dfrac{t(n-1)}{t-n}$ *allora* $u \in L^r(\Omega)$ *per ogni* $r \geq 1$;

c) *se* $p < \dfrac{n(t-1)}{t-n}$ *e* $\nu < \dfrac{t(n-1)}{t-n}$ *allora* $u \in M(a(p,\nu))$

essendo $M(a(p,\nu))$ *definito come nel Teorema* (2.4).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CHICCO, *Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale*, « B.U.M.I. », *3*, 384–394 (1970).

[2] M. K. V. MURTHY e G. STAMPACCHIA, *Boundary value problems for some degenerate elliptic operators*, « Ann. Mat. Pura e Appl. », *80* (4), 1–122 (1968).

[3] M. K. V. MURTHY e G. STAMPACCHIA, *Boundary value problems for some degenerate elliptic operators*, « Ann. Mat. Pura e Appl. », *90* (4), 413–414 (1971).

[4] G. STAMPACCHIA, *Régularization des solutions de problèmes aux limites elliptiques à donnés discontinues*, « Inter. Symp. on. Lin. spaces », 399–408, Jerusalem 1960.

[5] G. STAMPACCHIA, *Some limit cases of* L^p*-estimates for solutions of second order elliptic equations*, « Comm. Pure Appl. Math. », *16*, 505–510 (1963).

[6] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinues*, « Ann. Inst. Fourier Grenoble », *15*, 189–258 (1965).