
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

FLAVIO PORRECA, CAMILLO SANTORO

**Sullo spettro di diffrazione di un reticolo di fase a
frequenza ultrasonora in regime progressivo**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 55 (1973), n.1-2, p. 79-88.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_79_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_79_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE II

(Fisica, chimica, geologia, paleontologia e mineralogia)

Fisica. — *Sullo spettro di diffrazione di un reticolo di fase a frequenza ultrasonora in regime progressivo* (*). Nota (**) di FLAVIO PORRECA e CAMILLO SANTORO, presentata dal Socio A. CARRELLI.

SUMMARY. — The diffracted spectrum of an ultrasonic phase grating is studied by putting particularly in evidence the frequency distribution of diffracted light, the possibility of its accurate experimental verification by laser, and some applicative spectroscopic aspects.

I. INTRODUZIONE

Il fenomeno della luce diffratta da un reticolo di fase generato in mezzi trasparenti attraversati da onde elastiche, comunemente a frequenza ultrasonora, è stato oggetto di continuo studio, almeno da quarant'anni [1], sia per gli aspetti teorici e sperimentali del fenomeno « in sé », sia per utilizzarlo come strumento di misura di grandezze molecolari del mezzo, quali la velocità di propagazione di vibrazioni elastiche [2], moduli di elasticità, coefficiente di assorbimento e altri parametri molecolari associati [3].

Finora l'analisi del fenomeno si è generalmente limitata alla conoscenza della geometria dello spettro di diffrazione [4], in funzione della frequenza della radiazione e delle vibrazioni elastiche, ed alla distribuzione dell'intensità degli ordini di diffrazione [5], in funzione dell'ampiezza della variazione dell'indice di rifrazione, distinguendo il regime elastico progressivo da quello stazionario.

In particolare, viene generalmente omesso l'effetto della propagazione elastica sulla frequenza delle radiazioni diffratte, spesso semplicemente trascurato anche a motivo dell'enorme differenza tra la velocità della luce e delle onde elastiche [6].

In tal modo la trattazione generale del fenomeno diventa più semplice, ma certamente più povera di risultati, nonostante che il suo contenuto possa assumere la mole di un libro [7] recente ed aggiornato.

Ora, anche in questo settore, l'avvento del laser può e deve generare un nuovo impulso alla ricerca, arricchendone le informazioni sperimentali, precedentemente ottenute con le convenzionali sorgenti monocromatiche a vapori metallici, e dilatando il campo dell'indagine sperimentale anche all'analisi in frequenza dello spettro di diffrazione. Questa analisi ha ricevuto la prima conferma sperimentale solo di recente [8], proprio usando il laser: tuttavia essa era stata da tempo prevista da Brillouin [1], in uno schema di

(*) Istituto di Fisica sperimentale, Università di Napoli - Unità di ricerca C.N.R. - G.N.S.M.

(**) Pervenuta all'Accademia il 27 giugno 1973.

diffrazione tipo Bragg, e approfondita da Raman [9] e affrontata sperimentalmente da Bär [10] per la prima volta, ma con risultati non soddisfacenti.

Le suddette considerazioni sono quindi un valido supporto alle ragioni didattiche e scientifiche che spingono a passare in rapida rassegna tutto l'argomento in modo semplice e rigoroso, data la generale scarsità di informazioni complete, soprattutto in riferimento allo spettro in frequenza, se si escludono i parziali contributi riportati nei riferimenti bibliografici già precisati.

In tal modo, anche per gli esperti, questa trattazione puntualizzerà una delle informazioni più peculiari e profonde del fenomeno, arricchendone l'attualità: un effetto Döppler sulle righe diffratte, a frequenza multipla di quella delle vibrazioni elastiche, nel caso di regime progressivo, oggetto di questo primo studio.

2. ANALISI DELLO SPETTRO DI DIFFRAZIONE, IN AMPIEZZA ED IN FREQUENZA

Consideriamo un fascio parallelo luminoso, monocromatico, incidente ortogonalmente alla superficie piana di un mezzo trasparente, a facce piane e parallele. Se tale mezzo è isotropo ed omogeneo, il fascio luminoso emerge senza alcuna deviazione.

Se il mezzo è attraversato da un'onda elastica monocromatica piana, diretta ortogonalmente alla direzione di propagazione del fascio di luce, in esso si genera una periodica distribuzione di pressione, e quindi di densità e di indice di rifrazione. Conseguentemente, la superficie d'onda emergente dal mezzo non è piana, come quella incidente, ma presenta una periodica variazione di fase provocata dal fatto che i diversi raggi hanno attraversato zone del mezzo con indice di rifrazione differente e quindi si differenziano per il diverso cammino ottico, variabile secondo la legge di variazione dell'indice di rifrazione.

Scegliamo come origine degli assi di riferimento il centro O (fig. 1) della faccia del mezzo da cui emergono le radiazioni luminose, sia l'asse x diretto secondo la direzione di propagazione delle vibrazioni elastiche e sia l'asse z , ortogonale ad x , la direzione di incidenza del fascio di luce, che è anche l'asse ottico principale del dispositivo di osservazione del fenomeno di diffrazione.

Sia $e^{2\pi i\nu t}$ l'equazione dell'onda piana elettromagnetica, di frequenza ν e intensità unitaria, che incide sul mezzo nella direzione z e sia $e^{2\pi i\nu' t}$ l'equazione dell'onda piana elastica progressiva, di frequenza ν' e intensità unitaria, che attraversa il mezzo nella direzione x . Supponiamo, quindi, che non ci siano onde elastiche riflesse: in particolare, gli effetti dovuti ad un regime di onde elastiche stazionarie sono esclusi in questo studio.

In questa ipotesi, all'onda elastica progressiva è associata una legge di distribuzione dell'indice di rifrazione $n(x, t)$ nella direzione x , data da

$$(1) \quad n(x, t) = n_0 - \Delta n \left[\text{sen } 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu' t \right) \right]$$

avendo indicato con n_0 l'indice di rifrazione del mezzo, relativo alla frequenza ν , in assenza di vibrazioni elastiche, con Δn l'ampiezza della variazione dell'indice di rifrazione, con λ' la lunghezza d'onda della vibrazione elastica.

Quindi, l'equazione del fronte luminoso emergente parallelamente all'asse z diventa

$$e^{2\pi i \left(\nu t - \frac{Ln(x,t)}{\lambda} \right)}$$

essendo L la dimensione, parallela a z , del mezzo soggetto a vibrazioni e λ la lunghezza d'onda della luce.

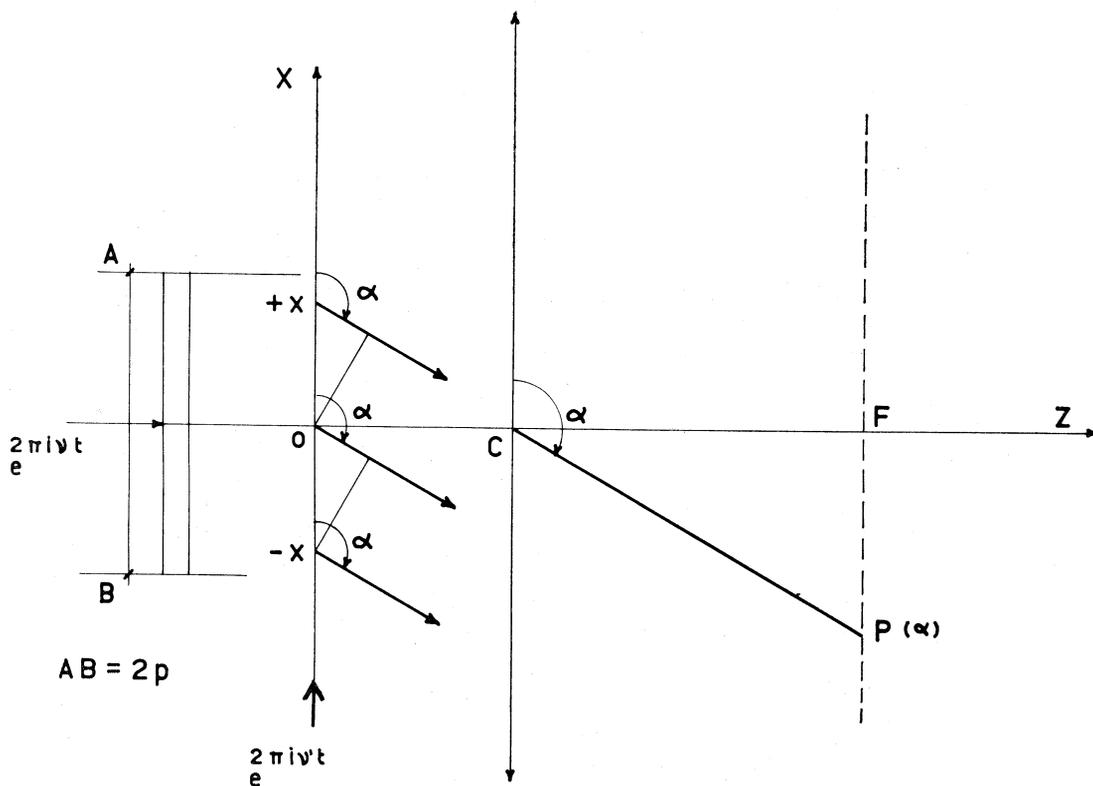


Fig. 1.

Se nel piano della fig. 1 l'estensione del fronte di luce emergente va da $-p$ a $+p$, l'ampiezza dell'ordine zero della radiazione concentrata nel fuoco F , di un dispositivo convergente di centro C con asse ottico principale coincidente con l'asse z , è proporzionale a

$$\int_{-p}^{+p} e^{2\pi i \left(\nu t - \frac{Ln(x,t)}{\lambda} \right)} dx.$$

Tenendo conto della (1), l'ampiezza dell'ordine zero è quindi proporzionale a

$$(2) \quad e^{2\pi i v t} \int_{-p}^{+p} e^{2\pi i \frac{L\Delta n}{\lambda} \left[\sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda'} - v't \right) \right]} dx.$$

Fissato ora (fig. 1) un punto $P(\alpha)$, nel piano focale ove si osserva lo spettro diffratto (alla Fraunhofer), individuato dall'angolo α che l'asse positivo x forma con la direzione positiva uscente dal centro ottico C e passante per $P(\alpha)$, l'ampiezza ivi dipende dal fascio di radiazioni emergenti dal mezzo parallelamente a $CP(\alpha)$ e sfasate tra loro. Detta x l'ordinata del punto di emergenza di uno dei raggi del fascio parallelo considerato, la variazione di cammino ottico, rispetto al raggio parallelo emergente da O è data da $x \cos \alpha$.

Quindi, l'ampiezza del fascio diffratto in $P(\alpha)$ è direttamente proporzionale a

$$(3) \quad e^{2\pi i v t} \int_{-p}^{+p} e^{2\pi i \left\{ \frac{x \cos \alpha}{\lambda} + \frac{L\Delta n}{\lambda} \left[\sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda'} - v't \right) \right] \right\}} dx$$

che si riduce alla (2) se $\alpha = (\pi/2)$.

L'accettazione della (3) implica la costanza di $\Delta n(x, t)$ nella propagazione luminosa lungo il tratto nella direzione z soggetto a vibrazioni elastiche, anche nel caso di fasci diffratti secondo angoli $\alpha \neq (\pi/2)$: in termini di ottica geometrica ciò significa che deve essere trascurabile la curvatura dei raggi nell'interno del mezzo, e ciò è tanto più vero quanto più L è piccolo ed α prossimo a $\pi/2$.

Quindi, quanto meglio saranno realizzate queste condizioni sperimentali, tanto più soddisfacenti dovranno risultare le verifiche sperimentali delle previsioni teoriche che stiamo per stabilire.

Per semplificazioni formali, poniamo $l = \cos \alpha$, $K = \frac{2\pi}{\lambda}$; $K' = \frac{2\pi}{\lambda'}$; $v = K L \Delta n$; $\omega' = 2\pi v'$ e quindi nella (3) compare l'integrale

$$(4) \quad \int_{-p}^{+p} e^{i K l x} e^{i v \sin(K' x - \omega' t)} dx.$$

È molto opportuno per risolverlo, utilizzare lo sviluppo [11] di un esponenziale di funzione periodica complessa, secondo le funzioni di Bessel di prima specie J_m , di ordine m intero ($= 0, 1, 2 \dots$), con $J_m = J'_m$ e $J_0 = 2J'_0$:

$$\begin{aligned} e^{i v \sin \rho} &= J_0(v) + \sum_1^{\infty} J_m(v) [e^{i m \rho} + (-1)^m e^{-i m \rho}] = \\ &= \sum_0^{\infty} J'_m(v) [e^{i m \rho} + (-1)^m e^{-i m \rho}]. \end{aligned}$$

Allora la (4) diventa:

$$(4') \quad \int_{-p}^{+p} e^{iKlx} \sum_0^{\infty} J'_m(v) [e^{im(K'x-\omega't)} + (-1)^m e^{-im(K'x-\omega't)}] dx =$$

$$= \sum_0^{\infty} J'_m(v) \left[e^{-im\omega't} \int_{-p}^{+p} e^{i(Kl+K'm)x} dx + \right.$$

$$\left. + (-1)^m e^{i\omega't} \int_{-p}^{+p} e^{i(Kl-K'm)x} dx \right]$$

e poiché

$$\int_{-p}^{+p} e^{iax} dx = \frac{2 \operatorname{sen} ax}{a}$$

la (4') può scriversi:

$$\sum_0^{\infty} J'_m(v) \left\{ e^{-im\omega't} \frac{2 \operatorname{sen} [(Kl + K'm) p]}{Kl + K'm} + \right.$$

$$\left. + (-1)^m e^{im\omega't} \frac{2 \operatorname{sen} [(Kl - K'm) p]}{Kl - K'm} \right\}$$

ovvero, a meno di un fattore:

$$\sum_0^{\infty} J'_m(v) \left\{ e^{-im\omega't} \frac{\operatorname{sen} [(Kl + K'm) p]}{(Kl + K'm) p} + \right.$$

$$\left. + (-1)^m e^{im\omega't} \frac{\operatorname{sen} [(Kl - K'm) p]}{(Kl - K'm) p} \right\}.$$

In conclusione tenendo presente la (3) l'ampiezza del fascio diffratto in $P(\alpha)$ è direttamente proporzionale alla seguente espressione:

$$(5) \quad \sum_0^{\infty} J'_m(v) \left\{ e^{2\pi i(v-mv)t} \cdot \frac{\operatorname{sen} [(Kl + K'm) p]}{(Kl + K'm) p} + \right.$$

$$\left. + (-1)^m e^{2\pi i(v+mv)t} \cdot \frac{\operatorname{sen} [(Kl - K'm) p]}{(Kl - K'm) p} \right\}.$$

In base a questa, si riconosce precisamente che l'intensità delle radiazioni diffratte, proporzionale al quadrato dell'ampiezza, è massima nelle direzioni tali che

$$(5') \quad Kl + K'm = 0$$

$$Kl - K'm = 0$$

ovvero rispettivamente, ricordando che $l = \cos \alpha$:

$$(6) \quad \cos \alpha'_m = -m \frac{\lambda}{\lambda'}$$

$$(7) \quad \cos \alpha''_m = m \frac{\lambda}{\lambda'}$$

Quindi, fissato m , si hanno due massimi di intensità nelle direzioni simmetriche, rispetto all'asse z , individuate dalla (6) e (7), con

$$\alpha'_m > \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \alpha''_m < \frac{\pi}{2}$$

e tali che (fig. 2)

$$\alpha'_m + \alpha''_m = \pi.$$

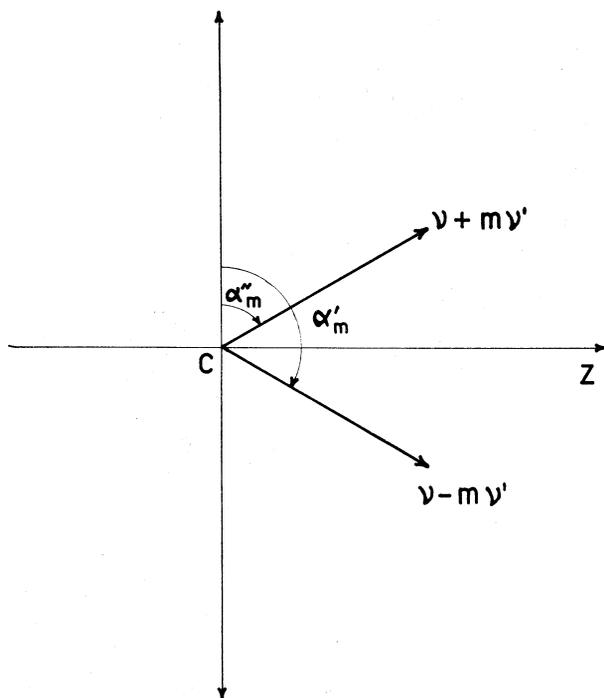


Fig. 2.

Conseguentemente, in queste condizioni espresse dalle (5'), tutti i termini della serie (5) sono sufficientemente trascurabili rispetto ai soli due termini seguenti

$$(8) \quad J'_m(\nu) e^{2\pi i(\nu - m\nu')t} + J'_m(\nu) e^{2\pi i(\nu + m\nu')t}.$$

Quindi le ampiezze dei due massimi, di ordine m , simmetrici rispetto all'asse z , sono uguali e direttamente proporzionali a $J'_m(\nu)$ e quindi anche le intensità, proporzionali a $J'^2_m(\nu)$, sono uguali.

In particolare, l'intensità relativa dell'ordine m^{esimo} , rispetto a quella dell' m^{esimo} , è data da

$$\left[\frac{J'_m(\vartheta)}{J'_n(\vartheta)} \right]^2.$$

Finalmente, dalla (8) si hanno ancora le corrette informazioni sulla frequenza dei singoli massimi di diffrazione. Si ricava infatti, dalle (5) e (8) la chiara e diretta interpretazione che la frequenza della radiazione risulta (fig. 2):

$\nu - m\nu'$ per il massimo di ordine m dato dalla (6), ($\alpha'_m > \frac{\pi}{2}$);

$\nu + m\nu'$ per il massimo di ordine m dato dalla (7), ($\alpha''_m < \frac{\pi}{2}$).

Solo l'intensità dell'ordine $m = 0$ conserva la frequenza ν della radiazione incidente.

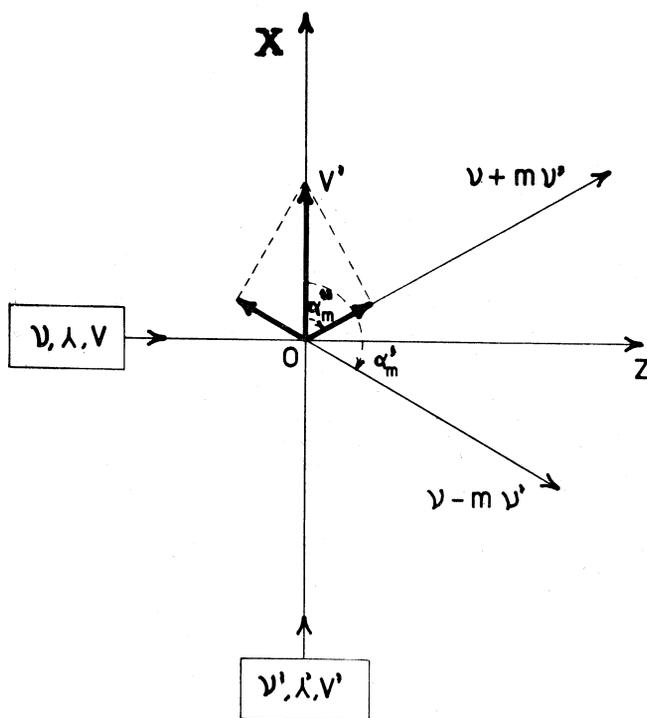


Fig. 3.

Queste conclusioni relative alla frequenza dei singoli massimi di diffrazione, si accordano con una significativa interpretazione fisica basata sull'effetto Döppler dovuto al moto relativo tra osservatore e sorgente diffrangente.

Infatti, il fascio diffratto di ordine m , per effetto della propagazione elastica nella direzione x con velocità V' , si allontana [si avvicina] nella direzione precisata dalla (6) [(7)] con velocità $V' \cos \alpha'_m$ [$V' \cos \alpha''_m$], come indica la fig. 3.

Quindi, indicata con V la velocità della luce, la frequenza del fascio diffratto subisce, per il ben noto effetto Döppler, variazioni di frequenza, rispetto a quella ν del fascio incidente, date da $\nu \frac{V' \cos \alpha'_m}{V} \left[\nu \frac{V' \cos \alpha''_m}{V} \right]$ che, tenendo conto della condizione di diffrazione (6), [(7)], corrispondono esattamente ad una diminuzione [ad un aumento] di frequenza data da $-m\nu'$, [$+m\nu'$], in accordo con le conclusioni della trattazione matematica.

3. ASPETTI SPERIMENTALI E CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Le conclusioni teoriche sulla distribuzione dell'intensità dei vari ordini di diffrazione, in funzione anche del parametro $\nu = \frac{2\pi L \Delta n}{\lambda}$, sono state da molto tempo verificate sperimentalmente con soddisfacente accordo [12], in regime elastico progressivo.

In questa sede ha più interesse attuale soffermarsi sugli aspetti sperimentali relativi allo spettro in frequenza dei vari ordini di diffrazione.

Nelle condizioni più favorevoli, si tratta di mettere sperimentalmente in evidenza una variazione di frequenza multipla intera di quella di onde elastiche ultrasonore ($\nu' \sim 10^6$ Hz), rispetto a quella della luce ($\nu \sim 10^{14}$ Hz). Quindi, anzitutto è necessario operare con radiazione tanto monocromatica che il suo spettro abbia una larghezza sufficientemente inferiore a $\sim 10^6$ Hz, in modo da poterne rivelare la variazione di una unità su 10^8 .

Sono da escludersi quindi le comuni, cosiddette, sorgenti monocromatiche, come quelle a vapori di Na, Cd, Hg, etc., il cui spettro presenta una banda di frequenza almeno $10^2 \sim 10^3$ volte più estesa del limite precisato a causa di ragioni ben note e non eliminabili, perché intrinseche al loro funzionamento, come l'allargamento spettrale per l'effetto Döppler, associato alla cinetica degli atomi del vapore, e quello dovuto alla molteplicità spettrale causata dall'emissione degli isotopi presenti nel vapore.

Per esempio, una delle migliori sorgenti monocromatiche convenzionali, a vapori di Cd (6438 \AA), ha una larghezza di banda di circa 600 MHz e quindi il limite della variazione di frequenza rivelabile diventa al più una unità su 10^6 .

Comparativamente, il più economico e semplice laser, a vapori di He-Ne, può emettere una radiazione con una lunghezza di banda dell'ordine di 10^6 Hz, con una risoluzione di una unità su 10^8 della frequenza di emissione. Tuttavia, nei laser più sofisticati si giunge a spettri di emissione contenuti entro qualche Hz.

È chiaro che la più elevata monocromaticità si traduce in una più sensibile analisi di effetti associati in qualche modo alla distribuzione spettrale della radiazione diffratta.

La luce laser ha anche più elevata intensità, o meglio per quanto detto, la più elevata intensità per unità spettrale, la maggiore collimazione ed il più alto grado di coerenza spaziale e temporale.

Tutte queste qualità rendono possibile solo col laser la dettagliata verifica dello spettro in frequenza, spingendo il controllo fino agli ordini di diffrazione più elevati (m molto grande), la cui intensità, nelle migliori condizioni, cioè per particolari valori di ν , non supera comunque il 30% dell'intensità incidente [12].

Per queste ragioni il primo tentativo di verifica quantitativa [8] ha avuto successo con l'uso di un laser He-Ne e la rivelazione della variazione a frequenza elastica della frequenza della luce diffratta è stata ottenuta dai battimenti tra i vari ordini di diffrazione.

Ma la ricerca sperimentale è ancora pienamente aperta e noi ci impegniamo ad approfondirne alcuni punti, in ordine di semplicità e di interesse.

In primo luogo, è da osservare che il metodo dei battimenti [8] rivela il modulo della variazione di frequenza, ma non il suo segno. Manca, finora, la verifica sperimentale del fatto che gli ordini diffratti di ordine m , simmetrici rispetto all'asse ottico principale, hanno frequenze diverse, $\nu + m\nu'$ e $\nu - m\nu'$, ma che quella maggiore compete al fascio diffratto diretto nel verso concorde con quello di propagazione delle onde elastiche (vedi la formula (7) e la fig. 3).

In secondo luogo una rigorosa verifica delle conclusioni teoriche stabilite deve potere precisare anche i limiti operativi di validità delle ipotesi poste alla base della teoria. Ci si deve, cioè, attendere delle discrepanze tra previsioni teoriche e controlli sperimentali, al crescere della estensione L del fronte elastico che si propaga nel mezzo.

Comunque, è notevole la concreta realtà che gli ordini di diffrazione così ottenuti possano considerarsi sorgenti di radiazione visibile a frequenza variabile secondo multipli interi di quella delle vibrazioni elastiche.

Il successo di questa prima verifica sperimentale si traduce, tra l'altro, nel campo della spettroscopia fine, in un contributo che può sostituire od affiancare altri metodi noti, atto a precisare l'effettiva larghezza della banda di emissione. Infatti, mediante l'analisi sperimentale dello spettro in frequenza delle righe diffratte da un reticolo di fase ultrasonoro, di frequenza ν' , se (non) è rivelabile la frequenza $m\nu'$, per battimenti dell'ordine zero e di quello m^{esimo} , si potrà affermare che la larghezza della banda di emissione è (maggiore) minore di $m\nu'$.

Questa possibilità è di notevole interesse nel campo della spettroscopia ottica e particolarmente in quella che sfrutta i metodi di risonanza magnetica ed è oggetto di attuale applicazione nell'ambito del programma di ricerche del settore risonanza magnetica, in corso presso l'Unità di Ricerca del Gruppo Nazionale Struttura della Materia (G.N.S.M.) di Napoli, diretta da uno di noi.

Desideriamo ringraziare il prof. A. Carrelli, oltre che per il suo noto continuo stimolo per la ricerca, anche per l'appassionato interesse ed il contributo di idee, che, in più punti, ha arricchito il lavoro.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. BRILLOUIN, « Ann. de Phys. », 17, 88 (1922).
- [2] F. PORRECA, « J.A.S.A. », 52 (1), 427 (1972).
- [3] W. SCHAAFFS, Landolt-Börnstein Data, K. H. Hellwege ed. Group. II, Vol. 5, Springer, Berlin (1967).
- [4] R. LUCAS e P. BIQUARD, « J. Phys. Rad. », III, 464 (1932).
- [5] C. V. RAMAN e N. S. NAGENDRA NATH, « Proc. Ind. Acad. Sci. », A2, 406 (1935).
- [6] J. MELNGAILIS, A. A. MARADUDIN e A. SEEGER, « Phys. Rev. », 131 (5), 1972 (1963).
- [7] M. V. BERRY, *The diffraction of light by ultrasounds*, Academic Press Inc. London, pag. 2 (1966).
- [8] H. CUMMINS, H. KNABLE, L. CAMPTEL e Y. YEH, « Appl. Phys. Lett. », 2, 62 (1963).
- [9] C. V. RAMAN e N. S. NAGENDRA NATH, « Proc. Ind. Acad. Sci. », A3, 75 (1936).
- [10] R. BÄR, « Helv. Phys. Acta », 8, 591 (1935).
- [11] G. GOUDET, *Les fonctions de Bessel et leurs applications en physique*, ed. Masson (Paris), pag. 32 (1954).
- [12] F. H. SANDERS, « Can. J. Res. », 14 (A), 158 (1936).