Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Matilde Pasqua

Alcune soluzioni a simmetria cilindrica dell'equazione relativistica di Navier-Stokes. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.1-2, p. 53–62.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_53_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Fisica matematica. — *Alcune soluzioni a simmetria cilindrica dell'equazione relativistica di Navier–Stokes* (*). Nota II (**) di MATILDE PASQUA, presentata dal Socio C. CATTANEO.

SUMMARY. — We consider the relativistic Navier-Stokes equation for a viscous fluid dragged by two rotating coaxial cylindrical walls. The properties of some physically meaningful solutions are discussed.

INTRODUZIONE

Il presente articolo si riallaccia ad una precedente Nota [1] sull'estensione relativistica dell'equazione di Navier–Stokes per un fluido viscoso comprimibile e conduttore di calore contenuto all'interno di due pareti cilindriche coassiali di lunghezza infinita. In tale Nota, che nel seguito indicheremo con Nota I, si imponeva alle due pareti cilindriche di muoversi di moto traslatorio uniforme con velocità parallele all'asse comune. Nella presente Nota consideriamo invece il caso in cui le due pareti cilindriche ruotano uniformemente attorno all'asse e supponiamo, come nella Nota I, che durante il moto ci sia un flusso termico attraverso le pareti supposte permeabili al calore in modo tale da poter considerare stazionaria la distribuzione di tutte le grandezze. Tenendo conto della stazionarietà e delle condizioni di simmetria del sistema si giunge a scrivere esplicitamente un'equazione differenziale del 1° ordine che determina la distribuzione euleriana delle velocità. L'equazione, ottenuta dalle equazioni relativistiche di Navier–Stokes con procedimento di eliminazione e di parziale integrazione, contiene due costanti indeterminate. L'equazione stessa viene anzitutto sottoposta a un duplice controllo:

a) al limite non relativistico ($c \to \infty$) l'equazione risulta equivalente all'equazione classica;

b) quando i raggi delle due pareti cilindriche tendono a ∞, rimanendo però finita e costante la loro distanza, l'equazione si identifica con l'equazione relativistica che determina la distribuzione delle velocità in un moto a simmetria piana (V. Cantoni [2]).

Si determinano poi alcune classi di soluzioni relative a particolari valori delle costanti che compaiono nell'equazione; in esse risulta automaticamente soddisfatta, senza necessità di imposizioni specifiche, la limitazione relativistica $v < c$. Sempre in relazione a tali soluzioni particolari si determina infine la distribuzione delle temperature, in corrispondenza a diverse forme della legge di conduzione.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1973.

1. Ipotesi e convenzioni

In un riferimento galileiano $R \equiv (0, x, y, z, t)$, si considerano due pareti cilindriche di lunghezza infinita $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ di comune asse z e di raggi r_1 ed $r_2 (r_1 < r_2)$, rotanti uniformemente intorno a z con velocità angolari assegnate ω_1 e ω_2. Tra queste due pareti sia contenuto un fluido viscoso, aderente alle pareti stesse, conduttore di calore e comprimibile; più precisamente, dette p, n, w rispettivamente la pressione, la densità propria numerica delle particelle e la densità propria di energia totale, supporremo sussistere un'equazione di stato $p = p(n, w)$.

Indicando con g^{ij} il tensore metrico, con $\boldsymbol{u} \equiv (u^i)$ il versore parallelo e concorde alla 4–velocità, con $\boldsymbol{q}$ il flusso termico specifico e con λ il coefficiente di viscosità supposto costante, adottiamo come legge del moto la versione relativistica, postulata da Eckart [3], delle equazioni classiche di Navier–Stokes:

$$\nabla_i W^{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, \cdots, 4) \tag{1}$$

dove W^{ij}, tensore di energia impulso del fluido, ha la forma:

$$W^{ij} \equiv w u^i u^j + p s^{ij} + \frac{1}{c} (q^i u^j + q^j u^i) - p^{ij}. \tag{2}$$

In esso compare il tensore simmetrico p^{ij}, tensore degli sforzi dovuti alla viscosità, che, a sua volta, è legato al moto del fluido, riassunto nel vettore unitario $\boldsymbol{u}$, dall'equazione costitutiva (1):

$$p^{ij} \equiv \lambda c \left[s^{ik} s^{jl} (\nabla_k u_l + \nabla_l u_k) - \frac{2}{3} s^{ij} s^{kl} \nabla_k u_l \right]; \tag{3}$$

quanto a s^{ij}, esso non è che il tensore metrico spaziale associato al riferimento fluido:

$$s^{ij} \equiv g^{ij} + u^i u^j. \tag{4}$$

All'equazione precedente associamo, con Eckart, un'equazione di conservazione della massa numerica

$$\nabla_i (n u^i) = 0. \tag{5}$$

Come nella Nota I, supporremo che le pareti cilindriche siano permeabili al calore così che durante il moto un opportuno flusso termico permetta condizioni di stazionarietà per tutte le grandezze, compresa la temperatura Θ e il flusso termico specifico $\boldsymbol{q}$. Circa i legami tra queste ultime grandezze

(1) Segnalo che nella precedente Nota I la seconda delle formule (2) e la formula (23) contengono alcuni termini scritti in modo non corretto. La loro formulazione esatta è data rispettivamente dalla (3) e dalla (7) della presente Nota. Dette modificazioni non hanno alcuna incidenza sui risultati della Nota I.

saggeremo sia la diretta versione relativistica della legge di Fourier:

$$q^i = -ks^{ij}\nabla_j \Theta \tag{6}$$

sia la più elaborata legge di conduzione postulata da Eckart:

$$q^i = -ks^{ij}(\nabla_j \Theta + \Theta\nabla_k u_j \cdot u^k) . \tag{7}$$

In (6) e (7) Θ rappresenta la temperatura assoluta e k il coefficiente di conducibilità termica.

Le equazioni di moto (1) vanno integrate tenendo conto della stazionarietà e delle simmetrie inerenti al problema e imponendo al fluido velocità assegnate $\omega_1 r_1$, e, $\omega_2 r_2$, sulle due pareti e un assegnato flusso di calore attraverso una di esse.

Nel riferimento R accanto alle coordinate cartesiane sopra introdotte, introduciamo un sistema di coordinate cilindriche di asse z

$$x^1 \equiv r \quad , \quad x^2 \equiv z \quad , \quad x^3 \equiv \theta \quad , \quad x^4 \equiv ct . \tag{8}$$

In tali coordinate la metrica spazio–temporale di M^4, spazio di Minkowski, assume la forma

$$ds^2 \equiv g_{ik}\, dx^i\, dx^k = dr^2 + dz^2 + r^2\, d\theta^2 - c^2\, dt^2 , \qquad (i , k = i, \cdots, 4) \tag{9}$$

e i simboli di Christoffel di seconda specie assumono i valori:

$$\begin{array}{llllll} \left\{ {2 \atop hk} \right\} = 0 & \left\{ {4 \atop hk} \right\} = 0 & & & \forall h , k = 1 , \cdots , 4 , & \\ \left\{ {1 \atop hk} \right\} = 0 & h , k = 1 , 2 , 4 & \left\{ {1 \atop h3} \right\} = 0 & h = 1 , 2 , 4 & \left\{ {1 \atop 33} \right\} = -r & \\ \left\{ {3 \atop hk} \right\} = 0 & h , k = 2 , 3 , 4 & \left\{ {3 \atop h3} \right\} = 0 & h = 2 , 3 , 4 & \left\{ {3 \atop 13} \right\} = \dfrac{1}{r} . & \end{array} \tag{10}$$

Oltre all'ipotesi di stazionarietà già introdotta, supponiamo che tutte le grandezze espresse in coordinate cilindriche siano indipendenti da θ (simmetria assiale) e da z (essendo $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ cilindri infiniti) e inoltre che la velocità sia puramente trasversale ($u^1 = u^2 = 0$). La condizione $\boldsymbol{u}^2 = -1$ si riduce allora ad un semplice legame tra u^3 e u^4

$$r^2 (u^3)^2 - (u^4)^2 = -1 \tag{11}$$

sicché u^3 può considerarsi come unica componente indipendente di $\boldsymbol{u}$.

Tra le componenti covarianti e controvarianti di $\boldsymbol{u}$ sussistono poi le relazioni

$$u_1 = 0 \quad , \quad u_2 = 0 \quad , \quad u_3 = r^2 u^3 \quad , \quad u_4 = -u^4. \tag{12}$$

Tenuto conto che Θ non dipende che dalla coordinata r e avuto riguardo alle (10), dalla legge di conduzione (6) discende che nelle ipotesi poste la densità del flusso calorifico $\boldsymbol{q}$ ha diversa da zero soltanto la prima componente q^1. Questa risulta legata a Θ dalla relazione

$$q^1 = -k \frac{d\Theta}{dr} \cdot \tag{6'}$$

Ad analoga conclusione si giunge adottando la legge di conduzione (7), la relazione tra q^1 e Θ essendo ora

$$q^1 = -k \left[\frac{d\Theta}{dr} - \Theta r (u^3)^2\right]. \tag{7'}$$

2. Equazioni di moto

Subordinatamente alle ipotesi fatte ed alle espressioni (10) dei simboli di Christoffel, le quattro equazioni (1) si riducono alla forma

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr} W^{11} + \dfrac{1}{r} W^{11} - r W^{33} = 0 \\ \dfrac{d}{dr} W^{12} + \dfrac{1}{r} W^{12} = 0 \\ \dfrac{d}{dr} W^{13} + \dfrac{3}{r} W^{13} = 0 \\ \dfrac{d}{dr} W^{14} + \dfrac{1}{r} W^{14} = 0 . \end{cases} \tag{13}$$

mentre l'equazione di continuità (5) risulta identicamente soddisfatta.

Le $(13)_3$, $(13)_4$ possono essere integrate prima ancora di esplicitare le componenti del tensore W^{ij}: si ha immediatamente

$$W^{13} = \frac{H}{r^3} \quad , \quad W^{14} = \frac{K}{r} \tag{14}$$

con H, K costanti di integrazione. Analogamente potrebbe operarsi sulla $(13)_2$, ma, come vedremo, ciò è superfluo.

Esplicitiamo ora, tenendo conto delle ipotesi fatte, le espressioni delle componenti del tensore energia impulso che compaiono in $(13)_1$, $(13)_2$ e nelle (14):

$$\begin{cases} W^{11} = p \\ W^{33} = w (u^3)^2 + p \left[\dfrac{1}{r^2} + (u^3)^2\right] \\ W^{12} = 0 \\ W^{13} = \dfrac{1}{c} q^1 u^3 - \lambda c \left[\left(\dfrac{1}{r^2} + (u^3)^2\right)\left(\dfrac{d}{dr} u_3 - \dfrac{2}{r} u_3\right) + u^3 u^4 \dfrac{d}{dr} u_4\right] \\ W^{14} = \dfrac{1}{c} q^1 u^4 - \lambda c \left[u^3 u^4 \left(\dfrac{d}{dr} u_3 - \dfrac{2}{r} u_3\right) + r^2 (u^3)^2 \dfrac{d}{dr} u_4\right] . \end{cases} \tag{15}$$

A sostituzione effettuata, la $(13)_2$ risulta identicamente soddisfatta mentre la $(13)_1$ e le (14) diventano rispettivamente:

$$
(16) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dr} p - r(u^3)^2 (w + p) = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{c} q^1 u^3 - \lambda c \left[\left(\dfrac{1}{r^2} + (u^3)^2 \right) \left(\dfrac{d}{dr} u_3 - \dfrac{2}{r} u_3 \right) + u^3 u^4 \dfrac{d}{dr} u_4 \right] = \dfrac{H}{r^3} \\[2ex] \dfrac{1}{c} q^1 u^4 - \lambda c \left[u^3 u^4 \left(\dfrac{d}{dr} u_3 - \dfrac{2}{r} u_3 \right) + r^2 (u^3)^2 \dfrac{d}{dr} u_4 \right] = \dfrac{K}{r} . \end{cases}
$$

Ad esse deve aggiungersi come si è già detto, l'equazione di stato

$$
(17) \qquad p = p(n, w) .
$$

Le (16) e (17) costituiscono un sistema di quattro equazioni (tre differenziali, una in termini finiti) tra le quattro funzioni incognite u^3, p, q, w. Si noti che la densità numerica n non deve considerarsi incognita; infatti qualunque sia la sua determinazione in funzione di r (all'istante iniziale t_0 e quindi anche per $t \geq t_0$) essa riesce sempre compatibile con l'equazione di conservazione (5).

Moltiplicando la $(16)_2$ per u^4/u^3 e confrontandola poi con la $(16)_3$ si ottiene:

$$
(18) \qquad \frac{u^4}{u^3} \cdot \left[\frac{(u^4)^2}{r^2} \left(\frac{d}{dr} u_3 - \frac{2}{r} u_3 \right) + u^3 u^4 \frac{d}{dr} u_4 \right] + \frac{u^4}{u^3} \frac{\gamma}{r^3} =
$$

$$
= u^4 u^3 \left(\frac{d}{dr} u_3 - \frac{2}{r} u_3 \right) + r^2 (u^3)^2 \frac{d}{dr} u_4 + \frac{\chi}{r}
$$

dove è posto

$$
(19) \qquad \gamma = \frac{H}{\lambda c} \quad , \quad \chi = \frac{K}{\lambda c} .
$$

Per semplificare le notazioni e per non confondere indici con esponenti poniamo da ora in poi

$$
(20) \qquad u^3 \equiv u \quad , \quad q^1 \equiv q .
$$

Esprimendo u^4 in funzione di u per mezzo della (12), l'equazione (18) nella sola u diventa:

$$
(21) \qquad r^2 \frac{du}{dr} - r^3 u^3 + \gamma \frac{1 + r^2 u^2}{r} - \chi r u \sqrt{1 + r^2 u^2} = 0 .
$$

Sarà comodo per il seguito introdurre la posizione

$$
(22) \qquad \xi \equiv ru
$$

con che l'equazione (21) assume la forma

$$r\xi' - \xi(1+\xi^2) + \gamma\frac{1+\xi^2}{r} - \chi\xi\sqrt{1+\xi^2} = 0\,; \tag{21'}$$

(Da ora in poi l'apice starà ad indicare la derivata totale rispetto alla variabile r).

Anche più significativa sarà la forma assunta dalla (21) scegliendo come incognita il modulo della velocità $\boldsymbol{v} \equiv (v^1, v^2, v^3)$ del fluido.

Tenendo conto del legame

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (\alpha = 1\,,2\,,3) \tag{23}$$

con $v^2 \equiv g_{\alpha\beta}\, v^\alpha\, v^\beta$, si ha $g_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta = v^2/(c^2 - v^2)$, e quindi

$$\xi = \frac{v}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{24}$$

La (21') diventa allora

$$crv' - vc + \frac{\gamma c}{r}\sqrt{c^2-v^2} - \chi v\sqrt{c^2-v^2} = 0\,. \tag{21''}$$

La (21), di cui abbiamo stabilito le forme equivalenti (21'), (21''), è un'equazione differenziale del I ordine la cui soluzione generale u sarà una funzione $u(r\,|\,\gamma\,,\chi\,,\eta)$, η essendo un'ulteriore costante di integrazione. Sostituendo tale soluzione in $(16)_2$ o in $(16)_3$ rimane determinato direttamente in termini finiti il flusso di calore $q = q(r\,|\,\gamma\,,\chi\,,\eta)$.

Le tre costanti disponibili vanno messe in relazione con le condizioni al contorno già enunciate e cioè con le velocità delle pareti cilindriche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ e con il flusso calorifico attraverso una di esse. Indicando con $\bar{q}$ e $\bar{u}$ rispettivamente i valori di q ed u sulla parete $\mathcal{C}_1$ e tenendo inoltre presenti le relazioni che intercorrono tra $u\,,\xi\,,v$, le $(16)_2$ e $(16)_3$ danno rispettivamente per γ e χ

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{1}{\lambda c^2}\,\bar{q} r_1^2 \bar{\xi} - r_1^2 \bar{\xi}' + r_1 \bar{\xi}(1+\bar{\xi}^2) \\[2ex] \chi = \dfrac{1}{\lambda c^2}\,\bar{q} r_1 \sqrt{1+\bar{\xi}^2} - \dfrac{r_1 \bar{\xi}\bar{\xi}'}{\sqrt{1+\bar{\xi}^2}} + \bar{\xi}^2\sqrt{1+\bar{\xi}^2} \end{cases} \tag{25}$$

oppure

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{\bar{q} r_1^2 \bar{v}}{\lambda c^3\sqrt{1-\bar{v}^2/c^2}} + \dfrac{r_1\bar{v} - r_1^2\bar{v}'}{c\sqrt{(1-\bar{v}^2/c^2)^3}} \\[3ex] \chi = \dfrac{\bar{q} r_1}{\lambda c^2\sqrt{1-\bar{v}^2/c^2}} + \dfrac{\bar{v}^2 - r_1\bar{v}\bar{v}'}{c^2\sqrt{(1-\bar{v}^2/c^2)^3}}\,. \end{cases} \tag{26}$$

3. CONTROLLI DELLE EQUAZIONI OTTENUTE AL LIMITE CLASSICO E AL LIMITE RELATIVISTICO PIANO

In analogia a quanto è stato fatto nella Nota I per i problemi là studiati, verifichiamo:

a) che l'equazione (21) è coerente con l'equazione classica del moto di un fluido viscoso tra due cilindri coassiali rotanti che, come è noto [2], si scrive

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0 \tag{27}$$

($v \equiv$ modulo della velocità del fluido).

b) che al tendere di r_1 ed r_2 ad ∞, rimanendo costante la loro differenza: $r_2 - r_1 = h$, la (21) si identifica con l'equazione relativistica corrispondente al moto di un fluido trascinato da due pareti piane parallele [3]

$$\frac{u'}{1+u^2} - a - \frac{bu}{\sqrt{1+u^2}} = 0 \tag{28}$$

($u \equiv$ componente spaziale non nulla del versore 4-velocità).

Per la verifica di *a*), usiamo la forma (21″) dell'equazione, che derivata rispetto ad r diventa:

$$r^2 v'' + rv' - v + \frac{vv'}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}(-\gamma c + \chi r v) - \chi(v'r + v)\sqrt{1-v^2/c^2} = 0. \tag{29}$$

Al limite per $c \to \infty$, la (29) tende alla forma (27). Infatti, tenuto conto delle espressioni (26) di γ e χ, il quarto e il quinto termine di (29), per $c \to \infty$, tendono chiaramente a zero.

Per la verifica di *b*) usiamo invece la (21′). Infatti è l'incognita ξ che, al limite per $r_1 \to \infty$ si identifica con l'incognita u della formula (28). Tenendo conto delle espressioni (25) di γ e χ, al limite per $r_1 \to \infty$ la (21′) assume la forma:

$$\frac{\xi'}{1+\xi^2} + \left(\frac{\bar{q}\bar{\xi}}{\lambda c^2} - \bar{\xi}'\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\left(\frac{\bar{q}}{\lambda c^2}\sqrt{1+\bar{\xi}^2} - \frac{\bar{\xi}\bar{\xi}'}{\sqrt{1+\bar{\xi}^2}}\right) = 0. \tag{30}$$

La (30) è esattamente l'equazione (28) con le costanti a, b rispettivamente uguali a

$$a = -\left(\frac{\bar{q}\bar{\xi}}{\lambda c^2} - \bar{\xi}'\right) \quad , \quad b = \frac{\bar{q}}{\lambda c^2}\sqrt{1+\bar{\xi}^2} - \frac{\bar{\xi}\bar{\xi}'}{\sqrt{1+\bar{\xi}^2}}. \tag{31}$$

(2) Cfr. per esempio LANDAU e LIFSCHITZ, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1958, p. 58.

(3) Cfr., V. CANTONI, «Meccanica», *6* (75), 78 (1971).

È facile verificare la corrispondenza tra i valori delle costanti delle equazioni (28) e (30) per esempio nel caso in cui la parete $\mathcal{C}_1$ sia supposta ferma. In tal caso da (31) si ha

$$a = -\bar{\xi}' \qquad b = \frac{\bar{q}}{\lambda c^2} \,.$$

Identici valori sono assunti dalle costanti dell'equazione (28) come si vede considerando le formule (20) e (21) del citato lavoro [2] e ponendovi $u^1 = 0$, $u^4 = 1$.

4. Alcune soluzioni particolari

L'equazione (21), anche nella forma (21′) o (21″) si presenta come un'equazione differenziale molto complessa. Adottata la forma (21′) assumendo ξ come variabile indipendente ed r come funzione incognita $r = r(\xi)$, essa assume la forma

$$r' \left[r - \frac{\gamma(1+\xi^2)}{\xi(1+\xi^2)+\chi\xi\sqrt{1+\xi^2}} \right] = \frac{r^2}{\xi(1+\xi^2)+\chi\xi\sqrt{1+\xi^2}} \tag{32}$$

in cui si riconosce un tipo di equazione differenziale studiata (4). Ciononostante un esame analitico generale della (32) non sembra né semplice né utile da un punto di vista fisico. Più utile ci sembra l'esame di alcune soluzioni particolari.

1) *Soluzioni corrispondenti al valore* $\gamma = 0$.

L'integrale della (21′) può essere espresso in termini finiti se, lasciando alla costante χ valori generici, si pone $\gamma = 0$.

In tal caso, come si può facilmente controllare, l'integrale generale, rispetto ad r, si scrive

$$r = \eta\left(\sqrt{1+\xi^2}+\chi\right)^{1/(\chi^2-1)}\left(\sqrt{1+\xi^2}-1\right)^{1/2(1-\chi)}\left(\sqrt{1+\xi^2}+1\right)^{1/2(1+\chi)} \tag{33}$$

η essendo una nuova costante di integrazione.

2) *Soluzioni corrispondenti ai valori* $\chi = 0$, $\gamma = 0$.

Supposto ora anche $\chi = 0$, la (33) dà le ∞^1 soluzioni

$$\xi = \frac{\eta r}{\sqrt{1-\eta^2 r^2}} \tag{34}$$

oppure, ricordando la posizione (22)

$$u = \xi/r = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2 r^2}} \,. \tag{34′}$$

(4) Cfr. E. Kamke, *DiffGlen Lösungsmethoden und Lösungen*, p. 26, 4, 11.

Affinché la (34) sia reale e finita occorre imporre alla costante η la limitazione

$$\eta < \frac{1}{r_2}. \tag{35}$$

Dalla (34), tenuto conto della relazione (24) tra ξ e v, si desume, in funzione di r, il modulo della velocità

$$v = c\eta r \qquad \left(\eta < \frac{1}{r_2}\right). \tag{34''}$$

Perché la (34'') sia equivalente alla (34) è necessario che ad essa si accompagni la limitazione (35).

È facile verificare che anche l'equazione classica (27) ammette soluzioni del tipo $v = ar$, corrispondenti a rotazioni rigide del fluido, nessuna limitazione risultando però imposta alla costante a e quindi alla velocità v. Nel caso relativistico invece le soluzioni (34'') sono soggette alla limitazione (35): $\eta < \frac{1}{r_2}$; quindi risulta necessariamente, qualunque sia r, compreso tra r_1 e r_2,

$$v(r) < c.$$

Si noti come tale limitazione, perfettamente coerente con i principi relativistici, non sia stata da noi imposta, ma sia risultata dalla condizione di realtà della soluzione (34).

5. DISTRIBUZIONE DELLE TEMPERATURE

Sempre con riguardo alla soluzione (34), (34'), sufficientemente descritta dal punto di vista dinamico, esaminiamone ora gli aspetti termici. Si osservi anzitutto che la distribuzione della densità di corrente calorifica nelle ipotesi ammesse $\gamma = \chi = 0$, si ottiene subito dalla $(16)_2$ (o dalla $(16)_3$); sostituita in tale equazione in luogo di u l'espressione (34'), risulta

$$q(r) \equiv 0. \tag{36}$$

Tale risultato non può sorprendere se si tiene conto che la soluzione stazionaria (24), (24'), (24'') corrisponde ad un movimento rigido, che non dà luogo a produzione interna di calore.

Dalla (36) si trae, in modo univoco, anche la distribuzione della temperatura. Questa dipende naturalmente dalla legge di conduzione che viene adottata; considereremo separatamente la legge (6) e la legge (7).

A) Assumendo la validità della legge di Fourier relativistica (6), da essa, tenuto conto della (36) si deduce

$$\Theta(r) \equiv \text{cost}.$$

Soltanto una distribuzione uniforme di temperatura risulta pertanto compatibile con la soluzione (34).

Quanto al valore costante della temperatura stessa esso può essere qualunque.

B) Supponendo valida la legge postulata da Eckart, essa fornisce per $\Theta(r)$, quando si tenga conto della (36), l'equazione differenziale

$$\frac{d\Theta}{dr} - \Theta \frac{r\eta^2}{1-\eta^2 r^2} = 0 \tag{38}$$

il cui integrale generale si scrive

$$\Theta = \frac{\tau}{\sqrt{1-\eta^2 r^2}} \tag{39}$$

con τ costante di integrazione, soggetta per evidenti motivi fisici, al solo vincolo di non essere negativa: $\tau \geq 0$. La circostanza che in un moto stazionario senza produzione interna di calore si abbia una distribuzione non uniforme di temperatura è chiaramente dovuta alla presenza del secondo termine nella legge di conduzione di Eckart.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. PASQUA, «Atti Acc. Naz. Lincei», *53* (1–2) (1972).
[2] V. CANTONI, «Meccanica», *6*, 75 (1971).
[3] C. ECKART, «Phys. Rev.», *58*, 919 (1940).
[4] L. D. LANDAU e E. M. LIFSHITZ, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (1959).
[5] E. KAMKE, *Differentialgleichungen-Lösungsmethoden und Lösungen* (1942).