Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vincenzo Dicuonzo

I sistemi di simmetrie delle quadriche come modelli di due tipi di spazi metrici finiti a debole struttura di incidenza

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.1-2, p. 37–41.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_37_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Geometria. — *I sistemi di simmetrie delle quadriche come modelli di due tipi di spazi metrici finiti a debole struttura di incidenza* (*). Nota (**) di VINCENZO DICUONZO, presentata dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — The purpose of this paper is to represent two types of metric spaces with a weak structure of incidence, over a field of characteristic > 2, by the systems of symmetries of the quadrics and their transformations.

I. RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO PROIETTIVO–METRICO FINITO DI PRIMO TIPO

Sia $S(3, q)$ uno *spazio proiettivo di dimensione* 3 *su un campo di caratteristica* > 2, *di ordine* $q = p^h$, dove p è un numero primo > 2 e h è un intero positivo. Siano inoltre $\mathcal{Q}_1$ *una quadrica a punti ellittici di* $S(3, q)$ e Φ_1 *la polarità definita da* $\mathcal{Q}_1$.

Chiamiamo *simmetria di* $\mathcal{Q}_1$ la restrizione a $\mathcal{Q}_1$ di una omologia armonica di $S(3, q)$ permutabile con Φ_1, e indichiamo con Σ_1 *il sistema delle simmetrie di* $\mathcal{Q}_1$: poiché i piani di $S(3, q)$ non tangenti a $\mathcal{Q}_1$, e quindi secanti $\mathcal{Q}_1$, sono $q^3 + q$, gli elementi di Σ_1 sono pure $q^3 + q$. In tal modo ad ogni simmetria α di $\mathcal{Q}_1$ è associato un piano secante $\mathcal{Q}_1$ oppure una conica $\mathcal{C}$ di $\mathcal{Q}_1$, luogo dei punti uniti di α. Gli elementi di Σ_1 permutabili con una stessa simmetria α di $\mathcal{Q}_1$ formano un insieme $\mathcal{R}_\alpha$, che viene detto *rete propria di* Σ_1 e contiene q^2 elementi, tanti cioè quanti sono i piani secanti $\mathcal{Q}_1$ e coniugati in Φ_1 del piano $\bar{\alpha}$ di $S(3, q)$ associato ad α. Se P è un punto di $\mathcal{Q}_1$ si chiama *rete impropria di* Σ_1 associata a P l'insieme $\mathcal{R}_p$ degli elementi di Σ_1 aventi P come punto unito: le reti improprie di Σ_1 sono $q^2 + 1$ e ciascuna contiene $q^2 + q$ elementi.

Se $\alpha, \beta \in \Sigma_1$, con $\alpha \neq \beta$, dicesi *fascio di* Σ_1 l'insieme $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ degli elementi di Σ_1 permutabili con α e β. Secondo che α e β abbiano in comune come punti uniti 2, 1, o nessun punto di $\mathcal{Q}_1$, gli elementi di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ hanno in comune come punti uniti 0, 1 o 2 punti di $\mathcal{Q}_1$ ed $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ viene detto *iperbolico, parabolico* o *ellittico*. Poiché ad ogni coppia non ordinata di elementi distinti di Σ_1 è associata una retta r di $S(3, q)$, ad ogni fascio di Σ_1 risulta associata una ben determinata retta r' di $S(3, q)$ polare di r in Φ_1: i fasci ellittici di Σ_1 sono perciò $q^2(q^2 + 1)$, quelli iperbolici pure $q^2(q^2 + 1)$ e quelli parabolici $(q + 1)(q^2 + 1)$. Si noti che un fascio $\mathcal{F}$ di Σ_1 contiene $q + 1$, q, o $q - 1$ elementi, secondo che $\mathcal{F}$ sia ellittico, parabolico o iperbolico.

Queste prime proprietà di Σ_1 permettono di rappresentare su $\mathcal{Q}_1$ uno spazio Ω_1 assumendo come *piani*, *rette e punti* di Ω_1 rispettivamente *gli elementi*,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche (sez. n. 4) del C.N.R., presso l'Istituto di Matematica Applicata della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1973.

i fasci e le reti di Σ_1 : in corrispondenza dei tipi di fasci e di reti di Σ_1 si hanno *rette iperboliche, paraboliche* ed *ellittiche* e *punti propri* e *impropri*. Si osservi che ad ogni piano, retta o punto di Ω_1 viene associato rispettivamente in $S(3, q)$ un piano secante $\mathcal{Q}_1$, una retta o un punto.

Per le definizioni date la *relazione di appartenenza tra gli elementi di* Ω_1 significa *appartenenza di elementi di* Σ_1 *a fasci e a reti di* Σ_1 *e inclusione di fasci di* Σ_1 *in reti di* Σ_1. Una *retta* e un *piano* di Ω_1 vengono detti *incidenti* o *paralleli*, secondo che le loro immagini su $\mathcal{Q}_1$ appartengano ad una rete propria o impropria di Σ_1: *due rette* di Ω_1 vengono dette *incidenti, parallele* o *sghembe*, secondo che le loro immagini su $\mathcal{Q}_1$ appartengano ad una rete propria o impropria di Σ_1 oppure non appartengano ad una stessa rete di Σ_1. Indirettamente la relazione di appartenenza tra gli elementi di Ω_1 viene espressa dall'appartenenza degli elementi associati di $S(3, q)$. Poiché ai piani di $S(3, q)$ tangenti a $\mathcal{Q}_1$ non corrispondono piani di Ω_1, questo spazio risulta a debole struttura di incidenza. Perché Ω_1 possa acquistare la stessa struttura di incidenza di $S(3, q)$ bisogna aggiungere agli elementi di Ω_1 dei nuovi *piani* detti *isotropi*, mentre gli altri *piani* di Ω_1 saranno chiamati *ordinari*. La costruzione dei piani isotropi è una conseguenza immediata della seguente relazione di perpendicolarità tra piani ordinari.

Due piani ordinari di Ω_1 *si dicono perpendicolari, se gli elementi corrispondenti di* Σ_1 *sono permutabili*. Per la definizione di rete propria di Σ_1 si ha che i piani di Ω_1 perpendicolari ad un piano ordinario α passano per un punto proprio A che viene detto *polo di* α.

Ciò premesso, si definisce *piano isotropo di* Ω_1 *associato ad un punto improprio* P *di* Ω_1 *l'insieme* π *costituito da* P *e dai poli dei piani ordinari per* P: il punto P viene detto polo del piano isotropo π, per cui π risulta perpendicolare a sè stesso e gli altri piani perpendicolari ad esso sono q^2+q e ordinari. In tal modo ad ogni piano isotropo di Ω_1 risulta associato un ben determinato piano di $S(3, q)$ tangente a $\mathcal{Q}_1$ e Ω_1 acquista la struttura di incidenza di $S(3, q)$.

Per la definizione dei fasci di $S(3, q)$, passano per una retta r' di Ω_1 i piani di Ω_1 perpendicolari a due piani ordinari α e β di Ω_1 e quindi ai piani per la retta $r = \alpha \cap \beta : r$ ed r' vengono dette *polari* e sono sghembe se sono di tipo diverso, parallele se paraboliche.

Se r ed r' sono due rette polari non paraboliche, due piani α e β ordinari per r, con $\alpha \perp \beta$, e due piani γ e δ per r', con $\gamma \perp \delta$, formano un cosiddetto *tetraedro autopolare*, al quale viene associato un tetraedro di $S(3, q)$ autopolare in Φ_1. Poiché i tetraedri autopolari in Φ_1 sono di due tipi secondo che $\frac{1}{2}(q+1)$ sia pari o dispari (v. [2], n. 1), vuol dire che, *rispetto ai tipi di tetraedri autopolari, gli spazi* Ω_1 *si possono suddividere in due classi, secondo che* $\frac{1}{2}(q+1)$ *sia pari o dispari*.

Se G_1 è *il gruppo generato da* Σ_1, indichiamo con $\mathcal{S}_\alpha$ *l'automorfismo interno di* G_1 *relativo all'elemento* α *di* Σ_1. Siccome il prodotto di tre elementi di Σ_1 appartenenti ad un fascio $\mathcal{F}$ è uguale ad un elemento di $\mathcal{F}$ (v. [2], n. 1), Σ_1 risulta *invariante* per $\mathcal{S}_\alpha$ e quindi per automorfismi interni di G_1 (v. [2], n. 1).

Inoltre, mediante $\mathcal{S}_\alpha$, fasci e reti di Σ_1 si mutano in fasci e reti di Σ_1 dello stesso tipo, restano uniti gli elementi di Σ_1 permutabili con α e si conservano l'appartenenza e la permutabilità in Σ_1, cioè in Ω_1 piani, rette e punti si mutano in piani, rette e punti dello stesso tipo e restano uniti sia i punti e le rette del piano rappresentato da α, sia le rette e i piani perpendicolari ad esso. Per queste proprietà $\mathcal{S}_\alpha$ viene chiamato *simmetria planare di* Ω_1. Dicesi *movimento di* Ω_1 *ogni prodotto di simmetrie planari di* Ω_1. Per la definizione di simmetria di $\mathcal{Q}_1$, G_1 risulta isomorfo *al gruppo dei movimenti dello spazio proiettivo–metrico finito di I tipo* (v. [2], n. 1 e [3], n. 1): a tale gruppo *risulta quindi isomorfo il gruppo* G_1^* *dei movimenti dello spazio* Ω_1 qui costruito. Per le proprietà del gruppo G_1^* si rimanda perciò al n. 1 di [2] e al n. 1 di [3].

II. RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO PROIETTIVO–METRICO FINITO DI SECONDO TIPO

Per questo spazio, che indicheremo con Ω_2, nello spazio $S(3, q)$ supponiamo data una *quadrica* $\mathcal{Q}_2$ *a punti iperbolici* e sia Φ_2 *la polarità definita da* $\mathcal{Q}_2$. Come per Ω_1, chiamiamo *simmetria di* $\mathcal{Q}_2$ la restrizione a $\mathcal{Q}_2$ di una omologia armonica di $S(3, q)$ permutabile con Φ_2 e indichiamo con Σ_2 *il sistema delle simmetrie di* $\mathcal{Q}_2$: ad ogni simmetria α di $\mathcal{Q}_2$ risulta associata una conica non degenere di $\mathcal{Q}_2$ luogo dei punti uniti di α oppure un piano secante $\mathcal{Q}_2$, per cui gli elementi di Σ_2 sono $q^3 - q$. Chiamiamo inoltre *rete propria di* Σ_2 l'insieme $\mathcal{R}_\alpha$ degli elementi di Σ_2 permutabili con una simmetria α di $\mathcal{Q}_2$: le reti proprie di Σ_2 sono $q^3 - q$ e ciascuna contiene q^2 elementi. Si chiama invece *rete impropria di* Σ_2, associata al punto P di $\mathcal{Q}_2$, l'insieme $\mathcal{R}_P$ degli elementi di Σ_2 aventi P come punto unito: le reti improprie di Σ_2 sono $(q+1)^2$ e ciascuna contiene $q^2 - q$ elementi. Infine chiamiamo *fascio di* Σ_2 l'insieme $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ degli elementi di Σ_2 permutabili con due elementi distinti α e β di Σ_2: secondo che α e β abbiano in comune come punti uniti 0, 1 o 2 punti di $\mathcal{Q}_2$, gli elementi di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ hanno pure in comune come punti uniti 0, 1 o 2 punti di $\mathcal{Q}_2$ e $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ viene detto *ellittico*, *parabolico* o *iperbolico*. Poiché ad ogni coppia non ordinata di elementi distinti di Σ_2 è associata una retta r di $S(3, q)$, ad ogni fascio di Σ_2 risulta pure associata una ben determinata retta r' di $S(3, q)$, polare di r rispetto a $\mathcal{Q}_2$: i fasci ellittici sono perciò $\frac{1}{2} q^2 (q-1)^2$, quelli iperbolici $\frac{1}{2} q^2 (q+1)^2$ e quelli parabolici $(q+1)^2 (q-1)$. Si noti inoltre che un fascio $\mathcal{F}$ di Σ_2 contiene $q+1$, q, o $q-1$ elementi, secondo che $\mathcal{F}$ sia ellittico, parabolico o iperbolico.

Ciò premesso, come *piani, rette e punti di* Ω_2 assumiamo rispettivamente *gli elementi, i fasci e le reti di* Σ_2: in corrispondenza dei tipi di fasci e di reti di Σ_2 si hanno *rette ellittiche*, *paraboliche* e *iperboliche* e *punti propri* e *impropri*. Anche per Ω_2 si ha che ad ogni piano, retta o punto di Ω_2 viene associato rispettivamente in $S(3, q)$ un piano secante $\mathcal{Q}_2$, una retta non appartenente a $\mathcal{Q}_2$, un punto.

Per le definizioni date la relazione di *appartenenza tra gli elementi di* Ω_2 significa *appartenenza di elementi di* Σ_2 *a fasci e reti di* Σ_2 *e inclusione di fasci di* Σ_2 *in reti di* Σ_2. La relazione di *parallelismo tra una retta e un piano o tra due rette*, come per Ω_1, viene definita come *appartenenza delle loro immagini ad una rete impropria di* Σ_2.

Indirettamente, come per Ω_1, la relazione di appartenenza tra gli elementi di Ω_1 viene espressa dall'appartenenza degli elementi associati di $S(3, q)$. Anche per Ω_2 la struttura di incidenza risulta più debole di quella di $S(3, q)$, perché ai piani di $S(3, q)$ tangenti a $\mathfrak{Q}_2$ e alle rette di $\mathfrak{Q}_2$ non corrispondono piani e rette di Ω_2. Per ottenere la stessa struttura di incidenza di $S(3, q)$, agli elementi di Ω_2 bisogna aggiungere delle nuove *rette* dette *isotrope* e dei nuovi *piani* detti *isotropi*: le altre *rette e* gli altri *piani* verranno chiamati *ordinari*.

Due punti impropri A e B di Ω_2 sono detti *non congiungibili*, se le corrispondenti reti di Σ_2 non hanno un fascio in comune: in tal caso si definisce *retta isotropa per* A *e* B *l'insieme costituito da* A *e* B *e dai punti impropri di* Ω_2 *non congiungibili con* A *e* B.

Come per Ω_1 alla definizione di piano isotropo premettiamo quella di perpendicolarità tra piani ordinari di Ω_2. *Due piani ordinari di* Ω_2 *si dicono perpendicolari, se gli elementi corrispondenti di* Σ_2 *sono permutabili*. Come per Ω_1, i piani ordinari perpendicolari ad uno stesso piano ordinario α sono q^2 e passano per un punto proprio A detto *polo di* α.

Si definisce *piano isotropo associato ad un punto improprio* P *l'insieme* π *costituito dalle rette isotrope per* P *e dai poli dei piani ordinari per* P: il punto P viene detto polo del piano isotropo π, per cui π risulta perpendicolare a sè stesso e gli altri piani perpendicolari ad esso sono $q^2 - q$ ordinari e $2q$ isotropi.

Con l'aggiunta delle rette isotrope e dei piani isotropi Ω_2 acquista la stessa struttura di incidenza di $S(3, q)$.

Per la definizione di fasci di Σ_2, passano per una retta r' di Ω_2 i piani ordinari di Ω_2 perpendicolari a due piani ordinari α e β di Ω_2 e quindi ai piani per la retta $r = \alpha \cap \beta$. Le due *rette* r ed r' vengono dette *polari* e sono dello stesso tipo: sono inoltre parallele, se sono paraboliche, altrimenti sono sghembe. Come per Ω_1, se r ed r' sono due rette polari sghembe, due piani α e β per r, con $\alpha \perp \beta$, e due piani ordinari γ e δ per r', con $\gamma \perp \delta$, formano un *tetraedro* cosiddetto *autopolare*, al quale è associato un tetraedro di $S(3, q)$ autopolare in Φ_2. Poiché in $S(3, q)$ i tetraedri autopolari in Φ_2 sono di quattro tipi e due si presentano, se $\frac{1}{2}(q+1)$ è pari, mentre gli altri due se $\frac{1}{2}(q+1)$ è dispari (v. [2], n. 2), si ha che, *rispetto ai tetraedri autopolari, gli spazi* Ω_2 *si possono suddividere in due classi, secondo che* $\frac{1}{2}(q+1)$ *sia pari o dispari*.

Se G_2 *è il gruppo generato da* Σ_2, indichiamo con $\mathfrak{S}_\alpha$ *l'automorfismo interno di* G_2 *relativo all'elemento* α *di* Σ_2. Ragionando come per Ω_1, si ha che, mediante $\mathfrak{S}_\alpha$, in Ω_2 piani, rette e punti si mutano in piani, rette e punti dello stesso tipo e restano uniti sia i punti e le rette di α, sia le rette e i piani perpendicolari ad α. $\mathfrak{S}_\alpha$ viene chiamato *simmetria planare* di Ω_2. Dicesi *movimento di* Ω_2 *ogni* *prodotto di simmetrie planari di* Ω_2. Come per Ω_1, per la definizione di simmetria di Ω_2, si ha che G_2 è isomorfo *al gruppo dei movimenti dello spazio proiettivo–metrico finito di II tipo* (v. [2], n. 2 e [3], n. 2): a tale gruppo *risulta* quindi *isomorfo il gruppo* G_2^* *dei movimenti dello spazio* Ω_2 qui costruito. Per le altre proprietà del gruppo G_2^* si rimanda perciò al n. 2 di [2] e al n. 2 di [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*. Edizioni Cremonese. Roma 1961.

[2] V. DICUONZO, *Su una classe di spazi metrici finiti e i gruppi dei loro movimenti*, « Annali di Matematica pura ed applicata » (di prossima pubblicazione).

[3] V. DICUONZO, *Su una classe di spazi metrici finiti a debole struttura di incidenza*, « Annali di Matematica pura ed applicata » (di prossima pubblicazione).