
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ABRAMO HEFEZ, FULVIO LAZZERI

**La matrice di intersezione di un polinomio di
Pham-Brieskorn**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 55 (1973), n.1-2, p. 1-3.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_1_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1973 (Luglio-Agosto)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *La matrice di intersezione di un polinomio di Pham-Brieskorn* (*). Nota (**) di ABRAMO HEFEZ e FULVIO LAZZERI, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — To each isolated singularity of hypersurface of dimension n , one associates the local fundamental group G of the moduli space minus the discriminant locus, and a representation $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(H)$, where H is the n -homology group, with integer coefficient, of the "non singular fibre". Although in general it is very difficult to determine even a presentation of G , we show that the image of σ can be fairly rather easily, by using some relations in a first approximative presentation of G , in the case of polynomials of the type $x_0^{a_0} + \dots + x_n^{a_n}$.

We solve in this way a conjecture of Arnold, Brieskorn [1].

Sia $f: (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ un germe di applicazione olomorfa la cui fibra $f^{-1}(0) = X_0$ abbia una singolarità isolata in $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$;

i.e. $\mathbf{C}\{x_0, \dots, x_n\} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ abbia dimensione finita μ su $\mathbf{C}$.

Denotiamo con $\mathfrak{M}$ l'ideale massimale in $\mathbf{C}\{x_0, \dots, x_n\}$ e siano $g_1, \dots, g_r$ tali che $1, g_1, \dots, g_r$ abbiano immagini linearmente indipendenti in $\mathbf{C}\{x_0, \dots, x_n\} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, f \right)$ e tali che $g_1, \dots, g_r, \frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ generino l'ideale $\mathfrak{M}$ su $\mathbf{C}\{x_0, \dots, x_n\}$.

Definiamo $X = \left\{ (x; \alpha; \beta) \in \mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}^r \times \mathbf{C} / f(x) + \sum_1^r \alpha_i g_i(x) = \beta \right\}$ e sia $\sigma: X \rightarrow \mathbf{C}^r \times \mathbf{C}$ la restrizione della proiezione naturale $(x; \alpha; \beta) \rightarrow (\alpha; \beta)$.

Si ha una identificazione $j: X_0 \hookrightarrow X$ di X_0 con la fibra $\sigma^{-1}(0)$ (per la definizione di deformazione semiuniversale e proprietà vedi Grauert [2]).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1973.

Asserzioni:

- 1) $X_0 \subset \mathbb{C}^j \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$ è una deformazione di X_0 .
- 2) L'applicazione indotta di $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$ nella base della deformazione semiuniversale di X_0 è un'immersione.
- 3) Il discriminante $\Delta \subset \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$ di σ è ridotto ed ha molteplicità μ in $\mathbb{C}$.

Il problema: Sia $X_\varepsilon = \sigma^{-1}(\varepsilon) \cap \{\|x\| \leq \eta\}$ con $0 < \varepsilon \ll \eta \ll 1$.

Allora (Milnor [4]) X_ε è una varietà compatta a bordo che ha il tipo di omotopia di un bouquet di μ sfere di dimensione n .

In particolare $H_n(X_\varepsilon, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^\mu$.

Il gruppo fondamentale locale di $\mathbb{C}^{r+1} - \Delta$ in o può essere presentato come in Lazzeri [3] nel seguente modo: Sia L una retta generica rispetto a Δ vicino a o in $\mathbb{C}^{r+1}$, allora l'omomorfismo naturale $\pi_1(L - \Delta) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^{r+1} - \Delta)$ è surgettivo (nei gruppi fondamentali scritti il punto base non è specificato perché si tratta di gruppi locali).

Sia $L \cap \Delta = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu\}$ e $\varepsilon_0 \in L - \Delta$, si scelgono, come al solito, generatori liberi $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu$ di $\pi_1(L - \Delta, \varepsilon_0)$ associati ad una scelta di tagli in L da ε_0 agli $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu$.

Facendo variare la retta L fra le rette generiche per Δ sino a tornare alla posizione iniziale si trovano delle relazioni tra i $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu$.

Ora X_{ε_i} ha una singolarità isolata quadratica non degenera, si può quindi associare a ogni φ_i un « ciclo evanescente » $e_i \in H_n(X_{\varepsilon_0}, \mathbb{Z})$ tale che l'automorfismo indotto da φ_i in $H_n(X_{\varepsilon_0}, \mathbb{Z})$ sia dato dalla formula di Picard-Lefschetz (*) $\varphi_i(z) = z - (-1)^{(n+1)(n+4)/2} \langle z, e_i \rangle e_i$, ove $\langle, \rangle$ denota l'intersezione di cicli $H_n(X_{\varepsilon_0}, \mathbb{Z}) \times H_n(X_{\varepsilon_0}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Inoltre si ha che

$$\langle e_i, e_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ dispari} \\ 2 \cdot (-1)^{n(n+1)/2} & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Ciò dà un omomorfismo $\pi_1(L - \Delta) \rightarrow \text{Aut}(H_n(X_{\varepsilon_0}, \mathbb{Z}))$ che è fattorizzato da un omomorfismo $\pi_1(\mathbb{C}^{r+1} - \Delta) \rightarrow \text{Aut}(H_n(X_{\varepsilon_0}, \mathbb{Z}))$.

L'azione di φ_i su $H_n(X_{\varepsilon_0}, \mathbb{Z})$ è determinata per (*) dalla matrice di intersezione $(\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$; quindi le relazioni tra i φ_i valide in $\pi_1(\mathbb{C}^{r+1} - \Delta)$ inducono delle relazioni tra gli elementi di questa matrice.

È stato congetturato che queste relazioni determinano univocamente la matrice $(\langle e_i, e_j \rangle)$. Più precisamente, se $(\langle e'_i, e'_j \rangle)_{i,j}$ è una soluzione di tali relazioni, si possono cambiare le orientazioni dei cicli evanescenti e_i di modo che $(\langle e'_i, e'_j \rangle)_{i,j}$ sia la matrice di intersezione?

Diamo una risposta affermativa a tale questione per i polinomi di Pham-Brieskorn; i.e. del tipo $f(x) = \sum_{i=0}^n x_i^{a_i}$ ove $a_0, \dots, a_n$ sono interi ≥ 2 .

Tale calcolo dà esplicitamente la matrice di intersezione su una base di cicli evanescenti e permette di ottenere i due seguenti dati:

- 1) La matrice di allacciamento del nodo $X_0 \cap \{x/\|x\| = \varepsilon\}$.
- 2) Scrivere esplicitamente in termini di matrici dei generatori dell'immagine di $\pi_1(\mathbb{C}^{r+1} - \Delta)$ in $\text{Aut}(H_n(X_{\varepsilon_0}, \mathbb{Z}))$.

In generale è difficile scrivere esplicitamente la presentazione di $\pi_1(\mathbf{C}^{r+1} - \Delta)$; ciò è stato fatto solo per una classe ristretta di singolarità isolate; più precisamente, per le singolarità razionali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BRIESKORN, *Conferenza a Cargèse*. In presentazione su Asterisque.
- [2] H. GRAUERT, *Deformationen isolierter Singularitäten*, « Inventiones Math. », 15 (3) (1972).
- [3] F. LAZZERI, *A theorem on the monodromy of isolated singularities*. In presentazione su Asterisque.
- [4] J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces*, « Annals of Math. Studies », 61. Princeton Univ. Press. (1968)