Sorin Gogonea

Sur un problème aux limites pour les fonctions analytiques à singularités données

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.1-2, p. 13–17.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_13_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Analisi matematica. — *Sur un problème aux limites pour les fonctions analytiques à singularités données.* Nota (*) di SORIN GOGONEA, presentata dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Siano D_1 e D_2 i dominii $y > 0$ e $y < 0$ del piano complesso $z = x + iy$. In questa Nota si determinano due funzioni analitiche $f_j(z) = \varphi_j + i\psi_j$ definite in D_j, $(j = 1, 2)$ le quali hanno singolarità isolate, con le seguenti condizioni: sono dati i valori delle φ_j sugli orli corrispondenti di alcuni tagli disposti sull'asse reale, mentre sul resto dell'asse reale i valori di φ_j e ψ_j verificano le condizioni di raccordo (5) e (6).

1. Soient dans le plan complexe $z = x + iy$ les domaines $D_1 : y > 0$ et $D_2 : y < 0$, et considérons sur l'axe réel, qui sera noté par L, les segments $L_s : \overline{A_s B_s}$ ayant respectivement les abscisses a_s et b_s $(s = 1, 2, \cdots, p)$, tel que $a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_p < b_p$. Soit E l'ensemble de ces extrémités, leurs abscisses considérées dans un ordre arbitraire étant notées par c_n $(n = 1, 2, \cdots, 2p)$. Désignons par L_s^+ et L_s^- le côté supérieur (vers $y > 0$), respectivement inférieur, de la coupure pratiquée sur L_s et posons $L^+ = \bigcup_{s=1}^{p} L_s^+$, $L^- = \bigcup_{s=1}^{p} L_s^-$. La réunion des intervalles $(-\infty, a_1)$, (b_1, a_2), (b_2, a_3), $\cdots$, (b_{p-1}, a_p) et (b_p, ∞) sera notée par L_0.

Soient enfin $F_1(z)$ et $F_2(z)$ deux fonctions uniformes définies dans tout le plan, à l'exception de l'ensemble S_1, respectivement S_2, de leurs singularités isolées. On suppose que $S_j \subset D_j$, $(j = 1, 2)$, de la sorte que $F_j(z)$ est holomorphe en $D_l \cup L$ $(l \neq j)$.

Dans ce qui suit nous nous proposons de résoudre le problème suivant: déterminer les fonctions analytiques $f_j(z)$ définies dans $D_j \setminus S_j$, $(j = 1, 2)$, continûement prolongéables sur $L \setminus E$, telles que:

a) La différence

$$\mathfrak{F}_j(z) = f_j(z) - F_j(z) \tag{1}$$

est holomorphe en D_j.

b) Au voisinage des points de E on ait

$$|f_r(z)| < \frac{C^{te}}{|z - c_n|^{\alpha}}, \qquad \alpha \in (0, 1). \tag{2}$$

c) les valeurs limites $f_j(\zeta)$ de $f_j(z)$ verifient les conditions

$$\operatorname{Re}\{f_1(\zeta)\} = m_1(\zeta), \qquad \zeta \in L^+, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re}\{f_2(\zeta)\} = m_2(\zeta), \qquad \zeta \in L^-, \tag{4}$$

$$\operatorname{Re}\{k_2 f_1(\zeta) - k_1 f_2(\zeta)\} = 0, \qquad \zeta \in L_0, \tag{5}$$

$$\operatorname{Im}\{f_1(\zeta) - f_2(\zeta)\} = 0, \qquad \zeta \in L_0, \tag{6}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1973.

où $m_1(\zeta)$ et $m_2(\zeta)$ sont des fonctions höldériennes données sur les segments L_s et k_1 et k_2 des constantes réelles données, de la sorte que $k_1 + k_2 \neq 0$.

On voit aisément que si $k_1 = k_2$, ce problème coïncide avec le problème de Dirichlet à singularités données pour une fonction définie dans tout le plan muni de coupures sur les segments L_s, [1], satisfaisant aux conditions aux limites (3) et (4) et dont la partie principale est $F_1(z) + F_2(z)$.

Sous la forme énoncée, le problème comporte des importantes applications dans la théorie de la filtration.

2. Pour résoudre le problème introduisons les fonctions

$$G_1(z) = \overline{F_2(\bar{z})} \quad \text{et} \quad g_1(z) = \overline{f_2(\bar{z})}. \tag{7}$$

Il est clair que $G_1(z)$ est définie dans tout le plan à l'exception de l'ensemble S_1^* de ses singularités, où $S_1^* \subset D_1$ est l'ensemble des points symétriques à S_2 par rapport à l'axe réel, tandis que $g_1(z)$ est définie en $D_1 \setminus S_1^*$ et telle que la différence $g_1(z) - G_1(z)$ est holomorphe en D_1. On a de même pour chaque $\zeta \in L \setminus E$

$$g_1(\zeta) = \overline{f_2(\zeta)} \tag{8}$$

ou bien

$$\operatorname{Re}\{g_1(\zeta)\} = \operatorname{Re}\{f_2(\zeta)\} \quad ; \quad \operatorname{Im}\{g_1(\zeta)\} = -\operatorname{Im}\{f_2(\zeta)\}. \tag{9}$$

En conséquence les conditions (5) et (6) peuvent être écrites respectivement sous la forme

$$\operatorname{Re}\{k_2 f_1(\zeta) - k_1 g_1(\zeta)\} = 0 \quad ; \quad \operatorname{Im}\{f_1(\zeta) + g_1(\zeta)\} = 0. \tag{10}$$

Ainsi nous sommes conduits d'introduire deux fonctions définies en $D_1 \setminus (S_1 \cup S_1^*)$ par les relations

$$H(z) = k_2 f_1(z) - k_1 g_1(z) \quad ; \quad K(z) = f_1(z) + g_1(z). \tag{11}$$

3. Compte tenu de (1) et (7) il résulte que si l'on pose

$$H_0(z) = k_2 F_1(z) - k_1 G_1(z), \tag{12}$$

la différence $H(z) - H_0(z)$ est holomorphe en D_1. Ensuite, vu les relations (10), (3) et (4), $H(z)$ satisfait sur l'axe réel aux conditions suivantes

$$\operatorname{Re}\{H(\zeta)\} = \begin{cases} 0, & \zeta \in L_0 \\ k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta), & \zeta \in L^+. \end{cases} \tag{13}$$

En conséquence $H(z)$ est la solution d'un problème de type Dirichlet à singularités données pour le demi-plan supérieur, qui s'exprime par la formule bien connue (voir par exemple [2]),

$$H(z) = H_0(z) - \overline{H_0(\bar{z})} + \frac{i}{\pi} \int_{L^+} \frac{k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta)}{z - \zeta} \, d\zeta, \tag{14}$$

le sens d'intégration sur chaque L_s étant celui de A_s à B_s.

D'une façon analogue si l'on définit la fonction

$$K_0(z) = F_1(z) + G_1(z)\,, \tag{15}$$

alors la différence $K(z) - K_0(z)$ est holomorphe en D_1. Compte tenu de (3), (4) et (10) il en résulte que $K(z)$ verifie sur $L \setminus E$ les conditions aux limites

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{K(\zeta)\} = m_1(\zeta) + m_2(\zeta)\,, && \zeta \in L^+, \\ &\operatorname{Im}\{K(\zeta)\} = 0\,, && \zeta \in L_0\,. \end{aligned} \tag{16}$$

On aboutit de la sorte au problème mixte de Volterra à singularités données pour le demi-plan supérieur que nous avons résolu auparavant, [3], [4]. La solution de ce problème s'obtient de la façon suivante. Soit $X(z)$ la solution du problème homogène sans singularités qui est bornée au voisinage des points $c_1, c_2, \cdots, c_r$ donnés à l'avance. L'expression de $X(z)$ est

$$X(z) = \sqrt{\frac{\prod_{s=1}^{r} (z - c_s)}{\prod_{s=r+1}^{p} (z - c_s)}}\,, \qquad r \leq 2p\,, \tag{17}$$

où le radical est considéré holomorphe dans le plan muni de coupures sur L_s, en choisissant par exemple la détermination qui est réelle et positive pour $z = x > b_p$ et qui doit être suivie par continuité.

Soit ensuite $M(z)$ la somme des parties principales de la fonction $K_0(z)/X(z)$ relativement à toutes les singularités. Alors on a

$$\begin{aligned} K(z) = X(z) \Big[& M(z) + \overline{M(\bar{z})} + P_{p-r}(z) + \\ & + \frac{i}{\pi} \int_{L^+} \frac{m_1(\zeta) + m_2(\zeta)}{X(\zeta)} \frac{d\zeta}{z - \zeta} \Big]\,, \end{aligned} \tag{18}$$

où $P_{p-r}(z)$ est un polinôme arbitraire à coefficients réels de degré $p - r$ si $p - r \geq 0$ et qui se réduit à une constante réelle C_0 si $p - r < 0$.

Si $p - r \geq 0$, la fonction $K(z)$ ainsi obtenue satisfait à toutes les conditions imposées. Par contre si $p - r < 0$, $K(z)$ possède un pôle supplémentaire d'ordre $r - p$ à l'infini. En effet en posant

$$\frac{K_0(z)}{X(z)} = M(z) + M_*(z)\,, \tag{19}$$

$M_*(z)$ étant donc holomorphe, on obtient de (7), (15), (18) et (19)

$$\begin{aligned} K(z) - K_0(z) = F_2(z) + \overline{F_1(\bar{z})} + X(z) \Big[& - M_*(z) - \overline{M_*(\bar{z})} + C_0 + \\ & + \frac{i}{\pi} \int_{L^+} \frac{m_1(\zeta) + m_2(\zeta)}{X(\zeta)} \frac{d\zeta}{z - \zeta} \Big]\,. \end{aligned}$$

$F_2(z)$ et $F_1(z)$ sont holomorphes en D_1, mais compte tenu de (17) il résulte que $X(z)$ a un pôle d'ordre $r-p$ à l'infini et donc la différence $K(z)-K_0(z)$ possède également cette singularité. Afin qu'elle disparaisse il faut et il suffit que la parenthèse qui multiplie $X(z)$ ait à l'infini un zéro de multiplicité $r-p$. Il est facile d'expliciter cette condition. À savoir, soit qu'au voisinage de $z=\infty$ on a le developpement

$$M(z)+\overline{M(\bar z)}-\frac{1}{X(z)}[F_1(z)+F_2(z)+ + \overline{F_1(\bar z)}+\overline{F_2(\bar z)}]+C_0=\sum_{j=0}^{\infty}{}' \beta_j z^{-j}. \tag{20}$$

Alors la solution (18) possède les singularités voulues si et seulement si

$$\beta_0=0 \tag{21}$$

$$\beta_k+\frac{i}{\pi}\int_{L^+}\frac{m_1(\zeta)+m_2(\zeta)}{X(\zeta)}\zeta^{k-1}\,d\zeta=0, \qquad k=1,2,\cdots,r-p-1, \tag{22}$$

et dans ce cas elle est unique [4]. Compte tenu de (20) la conditions $\beta_0=0$ peut être toujours remplie en prenant $C_0=0$.

4. $H(z)$ et $K(z)$ étant déterminés, $f_1(z)$ et $g_1(z)$ résultent de (11) sous la forme

$$f_1(z)=\frac{1}{k_1+k_2}[H(z)+k_1K(z)] \quad ; \quad g_1(z)=\frac{1}{k_1+k_2}[k_2K(z)-H(z)]. \tag{23}$$

Ensuite en utilisant la deuxième relation (7) on déduit l'expression de $f_2(z)$ et, tout calcul fait, on obtient la solution du problème posé sous la forme

$$\begin{aligned} f_1(z)&=\frac{1}{k_1+k_2}\Big\{H_0(z)-\overline{H_0(\bar z)}+k_1X(z)[M(z)+\overline{M(\bar z)}+P_{p-r}(z)]+\\ &+\frac{i}{\pi}\int_{L^+}\frac{k_2m_1(\zeta)-k_1m_2(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta+\frac{i}{\pi}k_1X(z)\int_{L^+}\frac{m_1(\zeta)+m_2(\zeta)}{X(\zeta)}\frac{d\zeta}{z-\zeta}\Big\},\\ f_2(z)&=\frac{1}{k_1+k_2}\Big\{H_0(z)-\overline{H_0(\bar z)}+k_2X(z)[M(z)+\overline{M(\bar z)}+P_{p-r}(z)]+\\ &+\frac{i}{\pi}\int_{L^+}\frac{k_2m_1(\zeta)-k_1m_2(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta+\frac{i}{\pi}k_2X(z)\int_{L^+}\frac{m_1(\zeta)+m_2(\zeta)}{X(\zeta)}\frac{d\zeta}{z-\zeta}\Big\}, \end{aligned} \tag{24}$$

$P_{p-r}(z)$ ayant la signification précisée au No. 3.

Compte tenu des raisonnements faits, il en résulte que si $p-r\geq 0$ les fonctions (24) représentent la solution du problème posé. Cette solution contient $p-r+1$ constantes arbitraires réelles et est bornée au voisinage des points $c_1, c_2, \cdots, c_r$. Si $p-r<0$, (24), où l'on doit prendre $P_{p-r}(z)=0$, représente la solution bornée au voisinage des points $c_1, c_2, \cdots, c_r$ si et seulement si les $r - p - 1$ conditions (22) sont satisfaites. L'accomplissement de ces conditions assure en même temps l'unicité de la solution.

Il est facile de vérifier que si $k_1 = k_2$, alors $f_1(z) = f_2(z)$ et l'expression commune de ces fonctions coïncide avec la solution du problème de Dirichlet à singularités données mentionné au No. 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. GOGONEA, « Rendiconti dei Lincei », *47*, 3–4, 151–156 (1969).
[2] C. JACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest–Paris, 1959.
[3] S. GOGONEA, « Comptes Rendus Acad. Sci. Paris », *268*, 210–213 (1969).
[4] S. GOGONEA, « Studii și Cercetări Matematice », *21*, 9, 1287–1367 (1969).