Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur l'inéquation des ondes non linéaire dans la fonction inconnue et avec un convexe dépendant du temps. Nota 1

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **55** (1973), n.1-2, p. 10–12.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_55_1-2_10_0>

Analisi matematica. — *Sur l'inéquation des ondes non linéaire dans la fonction inconnue et avec un convexe dépendant du temps.* Nota I di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dà un teorema di esistenza ed unicità relativo alla soluzione del problema di Cauchy per la disequazione (1.1).

§ 1. INTRODUCTION ET ENONCÉES

Dans un travail précédent nous avons traité le problème de Cauchy pour l'inéquation des ondes linéaire avec des contraintes sur la velocité dépendantes du temps. (Théorème 5 [1]).

Le résultat du Théorème 5 de [1] peut, facilement, être étendu à l'inéquation des ondes avec un terme non linéaire monotone dans la velocité.

J. L. Lions, [4] pag. 409, a donné un théorème d'existence et unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'inéquation des ondes avec un terme non linéaire dans la fonction inconnue dans le cas des contraintes sur la velocité indépendantes du temps.

Le but de ce travail est de traiter le problème de Cauchy pour cette inéquation dans le cas des contraintes sur la velocité dépendantes du temps.

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert borné de frontière Γ régulière et $K_i(t)$, $i = 1, 2$, $t \in [0, T]$ une fonction de $[0, T]$ dans l'ensemble des parties fermées convexes de $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ avec une vitesse numerique (cfr. [5], [6]) dans $\mathfrak{L}^1(0, T)$.

On dit espace de l'energie l'espace des couples $U(x) = (u(x), v(x))$ avec $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, $v(x) \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$, muni de la norme

$$\| U \|_E^2 = \| u \|_{H_0^1}^2 + \| v \|_{\mathfrak{L}^2}^2 .$$

Précisons que, chaque fois qu'on parlera d'une fonction $y(t, x)$ dans l'espace de l'energie, on considerera le couple $\left(y(t, x), \frac{\partial}{\partial t} y(t, x)\right)$.

Indiquons par $\partial I_{K_i(t)}$, $i = 1, 2$, la sous-différentielle de la fonction indicatrice du convexe fermé de $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ $K_i(t)$, $i = 1, 2$, et par $(\partial I_{K_i(t)})_\lambda$, $i = 1, 2$, sa régularisée Yoshida (d'ordre $\lambda > 0$) (cfr. [3] pp. 103).

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Parma ed Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 19 giugno 1973.

Considérons, maintenant, l'inéquation (en forme forte)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \Delta u(t, x) + |u(t, x)|^\rho u(t, x) + \left(\partial I_{K_1(t)} \frac{\partial u}{\partial t}\right)(t, x) + \tag{1.1}$$

$$+ \left(\partial I_{K_2(t)} \frac{\partial u}{\partial t}\right)(t, x) \ni f(t, x) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur } [0, T] \times \Omega$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{p.p.} \quad \text{sur } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \quad \text{p.p} \quad \text{sur } \Omega$$

$$u(t, x) = 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{sur } [0, T] \times \Omega.$$

Cette inéquation peut être écrite, avec des notations dont le sens est evident,

$$u''(t) - \Delta u(t, x) + |u(t)|^\rho u(t) + \partial I_{K_1(t)} u'(t) + \tag{1.2}$$

$$+ \partial I_{K_2(t)} u'(t) \ni f(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T] \text{ dans } \mathfrak{L}^2[\Omega]$$

$$u(0) = u_0 \qquad u'(0) = u_1$$

$$u(t) \in C(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Supposons maintenant qu'il y a $a_i(t) \in \mathfrak{L}^\infty(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$, $i = 1, 2$, telles que

$$(I - \lambda(\Delta + a_i(t)))\, K_i(t) \subset K_i(t) \tag{1.3}$$

$\lambda > 0$, $i = 1, 2$ et que $\forall \lambda$, $\mu > 0$ et $v \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$

$$((\partial I_{K_1(t)})_\lambda v, (\partial I_{K_2(t)})_\mu v) \geq 0 \tag{1.4}$$

où (,) indique le produit scalaire usuel dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$.

Nous démontrons le résultat suivant.

THÉORÈME 1. – *Soit* $f(t) \in C(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$ *avec* $f'(t) \in \mathfrak{L}^1(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$, $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $u_1 \in H_0^1(\Omega) \cap K_1(0) \cap K_2(0)$ *et* $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ *si* $n > 2$, ρ *fini positif quelconque si* $n = 2$.

Il y a alors une unique solution de (1.2) *avec* $u(t) \in \mathfrak{L}^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ $u'(t) \in \mathfrak{L}^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ *et* $u''(t) \in \mathfrak{L}^1(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$.

Le Théorème 1 est démontré dans le § 2 et dans le § 3 on donne un exemple d'application.

La méthode de démostration du Théorème 1, qui est éloignée de celle utilisée par J. L. Lions dans la démonstration du Théorème 7.2. pp. 409 [4], est voisine à celle du Théorème 5 de [1]; il faut, cependant, surmonter plusieurs difficultés techniques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BIROLI, *Sur les inéquations avec convexe dépendant du temps*, à paraître dans « Ricerche di Matematica ».

[2] H. BRÉZIS, *Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to non-linear partial differential equations*. Symposium on non linear Functional Analysis, Madison, Wisconsin (1971). Academic Press, 101–156 (1971).

[3] H. BRÉZIS, *Problèmes unilateraux*, « J. Math. Pures Appl. », *51*, 1–168 (1972).

[4] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod–Gauthier Villars (1969).

[5] J. J. MOREAU, *Distance à un convexe mobile d'une espace hilbertien*. Travaux du Séminare d'Analyse Convexe. Montpellier (1971). Exposé 13, 1–10.

[6] J. J. MOREAU, *Rafle par un convexe variable*. Travaux du Seminaire d'Analyse Convexe. Montpellier. 1ère partie (1971), Exposé 15, 1–43. 2ème partie (1972), Exposé 3, 1–36.