ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ALEXANDRU NEAGU

Sur les distributions structurelles d'une G-structure

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.6, p. 882–886.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_882_0>

Geometria differenziale. — *Sur les distributions structurelles d'une* G*–structure*. Nota di ALEXANDRU NEAGU, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Le distribuzioni strutturali di una G–struttura sono state introdotte in [6] da Gh. Gheorghiev. Queste distribuzioni sono definite sulla varietà base di una G–struttura e per esse non si può usare il metodo del riferimento mobile [5].

Qui, vengono trattati alcuni problemi globali sulle distribuzioni strutturali di una G–struttura, dando fra l'altro condizioni necessarie e sufficienti affinché una distribuzione risulti strutturale.

1. Soit $P(M, G)$ un espace fibré principal, où M est la base, P l'espace total, et G le groupe structural avec une base topologique dénombrable.

LEMME. *On peut réduire* $P(M, G)$ *à un sous–groupe fermé* $G_1 \subset G$ *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites*:

a) *Il y a une variété différentielle* V, *un point* $u_0 \in V$ *et une loi d'operation de* G *dans* V, $(g, u) \in G \times V \to g.u. \in V$, *de sorte que le stabilisateur de* u_0 *dans* G *soit* G_1 *et l'orbite* Gu_0 *soit localement fermée*;

b) *Il y a un morphisme* $A : P \to V$ *tel que* $A(P) \subset Gu_0$ *et* $A(z \cdot g) = g^{-1} A(z)$ *pour chaque* $z \in P$ *et* $g \in G$.

Démonstration. Soit π la projection $P \to M$ et p la restriction de π à $A^{-1}(u_0)$. Nous démontrons que:

a) $p(A^{-1}(u_0)) = M$,

b) $p^{-1}(x) = z.G$ où $z \in A^{-1}(u_0)$ et $x = p(z)$,

c) pour chaque $x \in M$ il existe une voisinage ouvert U de x et une application différentielle $\eta : U \to P(M, G)$ telle que $\eta(U) \subset A^{-1}(u_0)$ et $p \cdot \eta = id_U$.

Puisque G a une base dénombrable et Gu_0 est localement fermée dans V il suit que Gu_0 est une sous-variété de V [3]. Il résulte que A est un morphisme de P dans Gu_0 [4].

a) Soit $z_1 \in \pi^{-1}(x) \subset P$. Puisque $A(z_1) \in Gu_0$ il suit qu'il existe $g \in G$ tel que $A(z_1) = g.u_0$. Alors

$$A(z_1 \cdot g) = g^{-1} A(z_1) = g^{-1} g \cdot u_0 = u_0 ;$$

il résulte $z_1 g \in A^{-1}(u_0)$, donc $p(A^{-1}(u_0)) = M$.

b) Soit $z_1, z_2 \in A^{-1}(u_0)$ tel que $p(z_1) = p(z_2) = x$. Soit $g \in G$ tel que $z_2 = z_1 g$. Mais $A(z_2) = A(z_1 g) = g^{-1} A(z_1)$ donc $g^{-1} u_0 = u_0$ et il suit que $g \in G_1$, d'où résulte immédiatement que $p^{-1}(x) = z_1 \cdot G_1$.

(*) Nella seduta del 19 giugno 1973.

c) Soit U un ouvert dans M et $s: U \to P$ une section au dessus de U. Nous posons $\sigma = A \cdot s$. Soit la fibration canonique $G \to G/G_1$ et λ une section locale au dessus d'un ouvert $U' \subset G/G_1$. On suppose que $\sigma(U) \subset U'$. Soit $h = \lambda_0 \sigma$ et $\eta(x) = s(x) \cdot h(x)$ avec $x \in U$, alors $\eta : U \to P$ est une section au dessus de U et $\sigma(x) = \mathrm{pr} \cdot h(x) = h(x) \cdot u_0$, où *pr* est la projection $G \to G/G_1$. On peut écrire:

$$A(\eta(x)) = A(s(x) \cdot h(x)) = (h(x))^{-1} \cdot A(s(x)) = (h(x))^{-1} \cdot \sigma(x) =$$
$$= (h(x))^{-1} (h(x)) \cdot u_0 = u_0 .$$

Donc η est une section locale au dessus de U qui a les valeurs dans $A^{-1}(u_0)$.

Les conditions *a*), *b*) et *c*) étant satisfaites il suit que $A^{-1}(u_0)$ est un sous–fibré de $P(M, G)$.

Pour la suffisance nous faison d'abord une remarque. Si $H(M, G_1)$ est un sous–espace fibré de $P(M, G)$ avec G_1 fermé dans G, alors il existe une section globale $s: M \to P/G_1$. Soit (U, φ) et (U, ψ) des trivialisations associées sur $P(M, G)$ et $P(M, G)/G_1$. Soit $V = G/G_1$. On définit le morphisme $A: P \to V$ par:

$$A(z) = (\varphi_x^{-1}(z))^{-1} \cdot \psi_x^{-1}(s(x)) \qquad \text{pour } z \in \pi^{-1}(x) \text{ et } x \in U,$$

où φ_x (resp. ψ_x) est la restriction de φ (resp. ψ) à $\{x\} \times G$ (resp. $\{x\} \times G/G_1$). Si $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ et $(\bar{U}, \bar{\psi})$ sont d'autres trivialisations telles que $x \in U \cap \bar{U}$ alors:

$$(\bar{\varphi}_x^{-1}(z))^{-1} \cdot \bar{\psi}_x^{-1}(s(x)) = ((a_{\bar{\varphi}\varphi}(x) \cdot \varphi_x^{-1}(z))^{-1} \cdot (a_{\bar{\psi}\psi}(x)\, \psi_x^{-1})(s(x)) =$$
$$= (\varphi_x^{-1}(z))^{-1} \cdot (a_{\bar{\varphi}\varphi}(x))^{-1} \cdot a_{\bar{\psi}\psi}(x) \cdot \psi_x^{-1}(s(x)) = (\varphi_x^{-1}(z))^{-1} \cdot \psi_x^{-1}(s(x))$$

où $a_{\bar{\varphi}\varphi}$ (resp. $a_{\bar{\psi}\psi}$) est le cocycle subordonné aux cartes (U, φ) et $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ (resp. (U, ψ) et $(\bar{U}, \bar{\psi})$) et nous avons utilisé la proprieté $a_{\bar{\varphi}\varphi}(x) = a_{\bar{\psi}\psi}(x)$ qui est vraie pour les trivialisations associées. Il suit que A est globale définie.

Soit $z \in P$ et $g \in G$. Alors:

$$A(z \cdot g) = A(\varphi_x(\varphi_x^{-1}(z) \cdot g)) = (\varphi_x^{-1}(\varphi_x(\varphi_x^{-1}(z)) \cdot g))^{-1} \cdot \psi_x^{-1}(s(x)) =$$
$$= g^{-1} \cdot (\varphi_x^{-1}(z))^{-1} \cdot \psi_x^{-1}(s(x)) = g^{-1} \cdot A(z) \cdot \qquad \text{c.q.e.d.}$$

Conséquence 1. Dans les conditions du Lemme, si $u_1, u_2 \in G u_0$ ont les stabilisateurs G_1 et resp. G_2, alors $A^{-1}(u_1)$ et $A^{-1}(u_2)$ sont des sous-espaces fibrés conjugués; plus précisément il existe un $g \in G$ tel que $A^{-1}(u_1) \cdot g = A^{-1}(u_2)$ et $G_2 = g^{-1} G_1 g$.

En effet, soit $a \in G$ tel que $u_2 = a u_1$; nous avons $A(z a^{-1}) = a A(z) = a \cdot u_1 = u_2$ pour chaque $z \in A^{-1}(u_1)$ et donc $A^{-1}(u_1) \cdot a^{-1} = A^{-1}(u_2)$. L'affirmation est vraie pour $g = a^{-1}$.

Conséquence 2. Dans les conditions de la Conséquence 1, $G_1 = G_2$ si et seulement si $g \in \mathfrak{N}(G_1)$ (le normalisateur de G_1 dans G) ou $g \in \mathfrak{N}(G_2)$ (le normalisateur de G_2 dans G).

2. Soit $B_G(M)$ une G–structure sur la variété M et Δ une distribution involutive de dimension p et de classe C^∞ sur M. L'existence de la distribution Δ implique:

1) L'existence d'une G_1–structure $B_{G_1}(M)$ sur M, où

$$G_1 = \{\| a^i_j \| / \| a^i_j \| \in GL(n, R), a^{i'}_b = 0\}$$

$i, j, \cdots = 1, 2, \cdots, n$; $a, b, \cdots = 1, 2, \cdots, p$; $i', j', \cdots = p+1, p+2, \cdots, n$.

2) L'existence d'un morphisme: $A : \mathcal{F}(M) \to G^p(n) = GL(n, R)/G_1$ où $\mathcal{F}(M)$ designe l'espace des repères de M.

En effet, si nous désignons avec $\mathcal{G}^p(M) = \mathcal{F}(M)/G_1$ le fibré Grasmann des p–plans tangentes à M, alors Δ définit une section globale $M \to \mathcal{G}^p(M)$, donc $\mathcal{F}(M)$ est réductible à G_1. Pour 2) voir la suffisance du Lemme.

On note par $B_G(N)$, $\mathcal{F}(N)$, $B_{G_1}(N)$, et $\mathcal{G}^p(N)$ les restrictions des fibrés $B_G(M)$, $F(M)$, $B_{G_1}(M)$ et resp. $\mathcal{G}^p(M)$ à une feuille N de Δ. Soit ${}^N A$ la restriction du morphisme A à $B_G(N)$.

Définition 1. La distribution Δ est dite structurelle pour la G–structure $B_G(M)$ si, pour chaque feuille N de Δ, ${}^N A$ est constante.

Définition 2. La distribution Δ est dite structurelle absolue pour la G–structure $B_G(M)$ si la restriction de A à $B_G(M)$ est constante.

THÉORÈME 1. *Pour qu'une distribution* Δ *sur* M *soit structurelle absolue pour une* G–*structure* $B_G(M)$ *sur* M, *il faut et il suffit que* $B_G(M)$ *soit sous–fibré d'une structure conjugée avec* $B_{G_1}(M)$.

Démonstration. Soit $u \in G^p(n)$ tel que $A(B_G(M)) = u$. Il résulte que $u \in Gu_0$ où $u_0 \in G^p(n)$ a le sous groupe de stabilité dans $GL(n, R)$ le groupe G_1 et Gu_0 est l'orbite de u_0 (ici la loi d'operation de G dans $G^p(n)$ est $(g, a \cdot G_1) \in G \times G^p(n) \to g \cdot a \cdot G_1 \in G^p(n)$). D'autre part $A^{-1}(u)$ est une structure sur M conjuguée avec $B_{G_1}(M)$ (Conséquence 1).

Si $B_G(M)$ est un sous-espace fibré d'une structure conjuguée avec $B_{G_1}(M)$ il suit que $B_G(M) \subset A^{-1}(u)$ avec $u \in G^p(n)$ (voir le Lemme) et donc A est constante sur $B_G(M)$.

Observation. Le Théorème 1 reste valable pour les distributions structurelles absolues généralisées [8].

On déduit le théorème suivant par la même démonstration qui a permis d'établir le Théorème 1.

THÉORÈME 2. *Pour qu'une distribution* Δ *sur* M *soit structurelle pour une* G–*structure* $B_G(M)$ *sur* M *il faut et il suffit que* $B_G(N)$ *soit sous–espace fibré d'une structure conjuguée avec* $B_{G_1}(N)$.

Soit $G(n)$ la variété Grassmann de toutes sous–espaces de R^n. Il est connu [2] que $G(n)$ est une variété compacte et $G^p(n)$ (la variété Grassmann des sous-espaces de dimension p de R^n, $p = 1, 2, \cdots, n$) est une sous–variété pure de type $R^{p(n-p)}$, connexe, ouverte et fermée. $G^p(n)$ sont aussi les orbites de $GL(n, R)$ qui admettent évidemment une loi d'opération dans la variété $G(n)$. Si G est un sous-groupe de $GL(n, R)$, il suit qu'il admet aussi une loi d'opération dans $G(n)$.

THÉORÈME 3. *Soit* $B_G(M)$ *une* G*-structure sur* M *et* $B_H(M)$ *un sous-fibré des repères fermé dans* $B_G(M)$. *Si l'espace homogène* G/H *est isomorphe avec une orbite localement fermée* Gu_0 *de* G *alors* $B_H(M)$ *est défini par une distribution* Δ *sur* M.

Démonstration. Soit $G^p(n)$ tel que $Gu_0 \subset G^p(n)$. $B_G(M)$ est réductible à H donc il existe un morphisme $A_0 : B_G(M) \to G/H$ tel que $A_0(z \cdot g) = g^{-1} A_0(z)$ pour tous $z \in B_G(M)$ et $g \in G$. Il résulte que A_0 est un morphisme de $B_G(M)$ dans $G^p(n)$ qui a les valeurs dans Gu_0. Soit π la projection $\mathfrak{F}(M) \to M$ et p la restriction de π à $B_G(M)$. Soit $z_1 \in \pi^{-1}(x)$ et $z_0 \in p^{-1}(x)$. Allors il existe $g \in GL(n \cdot R)$ tel que $z_1 = z_0 g$. On définit un morphisme $A: \mathfrak{F}(M) \to G^p(n)$ par: $A(z_1) = g^{-1} A_0(z_0)$. Puisque $A_0(z_0) \in G^p(n)$ et $G^p(n)$ est une orbite de $GL(n, R)$, il suit que $g^{-1} A_0(z_0) \in G^p(n)$; donc A a les valeurs dans $G^p(n)$. Si $z_1 = z_0 \cdot g$ avec $z_0 \in p^{-1}(x)$ et $g \in G$, alors $z_0 = z_0 g g^{-1}$ et donc:

$$A(z_1) = g^{-1} A_0(z_0) = g^{-1} A_0(z_0 g g^{-1}) = g^{-1}(g \cdot g^{-1})^{-1} A_0(z_0) = g^{-1} A_0(z_0).$$

Donc A est bien défini. Il suit que les conditions du Lemme sont satisfaites; donc $\mathfrak{F}(M)$ peut être réduit à G_1. Il resulte que nous avons obtenu une section $\Delta : M \to \mathfrak{F}(M)/G_1$, mais $\mathfrak{F}(M)/G_1$ est le fibré Grassmann des p-plans tangentes à M, donc nous avons défini une distribution Δ sur M. Soit $B_{G_1}(M)$ le fibré des repères définit par Δ: alors on déduit immédiatement que $B_H(M) = B_G(M) \cap B_{G_1}(M)$.

Observation. La distribution Δ définie ci-dessus est une distribution structurelle absolue généralisée pour la H-structure $B_H(M)$ [8].

3. *Exemple.* Soit M une variété paracompacte. Soient Δ_1 et Δ_2 deux distributions sur M, avec dimensions p et resp. q, telles que $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Soit $B_{G_1}(M)$ (resp. $B_{G_2}(M)$) le fibré des repères définit par Δ_1 (resp. Δ_2), où:

$$G_1 = \{ \| a^i_j \| / \| a^i_j \| \in GL(n, R), \ a^{i'}_b = 0 \}$$

$$i, j, \dots = 1, 2, \dots, n \ ; \ a, b, \dots = 1, 2, \dots, p \ ; \ i', j', \dots = p+1, \dots, n,$$

$$G_2 = \{ \| a^i_j \| / \| a^i_j \| \in GL(n, R), \ a^{i'}_b = 0 \}$$

$$i, j, \dots = 1, 2, \dots, n \ ; \ a, b, \dots = 1, 2, \dots, q \ ; \ i', j', \dots = q+1, \dots, n.$$

Tenant compte que M est paracompacte, on peut considérer sur M la structure Riemannienne $O(M)$ avec le groupe structural $O(n)$ (le groupe orthogonal). Soit:

$$A_1 : \mathfrak{F}(M) \to G^p(n),$$

$$A_2 : \mathfrak{F}(M) \to G^q(n)$$

les morphismes définis par Δ_1 et Δ_2. On peut vérifier immédiatement que la variété $G^p(n)$ (resp. $G^q(n)$) est isomorphe avec $O(n)/\bar{G}_1$ (resp. $O(n)/\bar{G}_2$) où $\bar{G}_1 = O(n) \cap G_1$ (resp. $\bar{G}_2 = O(n) \cap G_2$). Il suit que, pour $O(M)$, $\bar{G}_1$ et la restriction de A_1 à $O(M)$ (resp. $O(M)$, $\bar{G}_2$ et la restriction de A_2 à $O(M)$) les conditions du Lemme sont vérifiées et donc on peut considérer les espaces fibrées reduits $B_{\bar{G}_1}(M)$ et $B_{\bar{G}_2}(M)$.

On montre que la restriction du morphisme A_1 à $B_{\bar{G}_2}(M)$ a les valeurs dans une orbite de $\bar{G}_2$. Ici on considère la loi d'operation de $\bar{G}_2$ sur $G^p(n)$. Soit π_1 (resp. π_2) la projection $B_{G_1}(M) \to M$ (resp. $B_{G_2}(M) \to M$). Evidemment on a $\pi_1^{-1}(x) \cap \pi_2^{-1}(x) \neq \Phi$ pour chaque $x \in M$. Soit $u_0 \in G^p(n)$ tel que $A_1^{-1}(u_0) = B_{G_1}(M)$. Soit $z_2 \in \pi_2^{-1}(x)$ et $z_1 \in \pi_1^{-1}(x) \cap \pi_2^{-1}(x)$. Alors $A_1(z_1) = u_0$ et $z_2 = z_1 g_2$ avec $g_2 \in \bar{G}_2$. Il résulte que:

$$A_1(z_2) = g_2^{-1} A_1(z_1) = g_2^{-1} u_0 \in \bar{G}_2 u_0 .$$

Ayant en vue que $\bar{G}_2$ est compact, on peut conclure que l'orbite $\bar{G}_2 u_0$ est aussi compacte, donc elle est une sous-variété de $G^p(n)$. Ainsi les conditions du Lemme sont satisfaites, donc $B_{G_2}(M)$ est réductible à $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = H$; l'espace fibré réduit sera noté par $B_H(M)$.

Observation. $B_H(M)$ est une H–structure sur M, pour lequelle Δ_1 et Δ_2 sont des distributions structurelles absolues généralisées.

Un peut plus généralement dire que, si Δ_1 et Δ_2 sont des distribution sur une variété paracompacte M, telles qu'il existe, pour chaque $x \in M$, un repère orthonormé distingué pour $B_{G_1}(M)$ et $B_{G_2}(M)$, alors il y a une H–structure $B_H(M)$ sur M pour laquelle Δ_1 et Δ_2 sont des distributions structurelles généralisées. Le groupe H est précisément le groupe $O(n) \cap G_1 \cap G_2$.

La démonstration est analogue à la précédente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BERNARD, *Sur la géométrie différentielle des G–structures*, «Ann. Inst. Fourier», *10*, 151–270 (1960).

[2] N. BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques*. (Fascicule de résultats). Hermann, Paris 1967.

[3] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*. Hermann, Paris 1972.

[4] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups*. Princeton 1946.

[5] GH. GHEORGHIEV, *Sur la méthode du repère mobile*, «Izv. Mat. Institut Bulgarska Akad.», *11*, 17–25 (1970).

[6] GH. GHEORGHIEV, *Sur les distributions structurales d'une G–structure*, «Analele şt. Univ. Iaşi», *14*, 81–97 (1968).

[7] GH. GHEORGHIEV, *Sur les distributions structurales d'un pseudogroupe Lie*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», *39*, 35–46 (1967).

[8] A. NEAGU, *Sur les distribution structurelles d'une variété douée d'une G–structure*, «C.R. Acad. Sc. Paris», *276*, 479–481 (1973).