
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LEONIDA EUGENIO KRIVOSHEIN, DEMETRIO MANGERON,
MEHMET NAMIK OGUZTORELI, FRANCESCO SAVERIO
ROSSI

**Studi concernenti certe estensioni delle equazioni
integrali ed integro-differenziali di Volterra. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.6, p. 860–864.*
Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_860_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_860_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Studi concernenti certe estensioni delle equazioni integrali ed integro-differenziali di Volterra* (*). Nota II di LEONIDA EUGENIO KRIVOSHEIN⁽¹⁾, DEMETRIO MANGERON⁽²⁾, MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELİ⁽³⁾ e FRANCESCO SAVERIO ROSSI⁽⁴⁾, presentata (**)
dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — In the framework of the Authors' research papers devoted to studies of mathematical systems with mixed structures, various extensions of nonlinear integral and integro-differential equations of Volterra and Picone's types play a very important role. The Authors, continuing their previous paper published in the same « Rendiconti Lincei » and concerned with the existence, the unicity and the stability of a new extension of Volterra nonlinear integro-differential equations, deal in what follows with a class of very interesting new extensions of integral and integro-differential Volterra nonlinear equations and prove the existence, the unicity and construct and evaluate different approximate solutions.

1. In ciò che segue gli Autori espongono, avendo per luminosa guida l'indelebile opera di Volterra e del loro amatissimo Maestro M. Picone, pur tenendo conto di una larga serie di lavori propri concernenti i sistemi matematici con struttura composita, come pure di contributi odierni nel dominio degli studi sulle equazioni-integro-differenziali ove brilla tutt'ora la Scuola Kirghisa, i risultati concernenti l'esistenza, l'unicità, la costruzione delle soluzioni approssimate e la valutazione degli errori commessi di una vasta classe di equazioni integrali ed integro-differenziali non lineari che costituiscono una sensibile estensione delle equazioni corrispondenti di Volterra.

Le citazioni bibliografiche alla fine della presente Nota completano ma non ripetono le indicazioni date nella Bibliografia che segue dopo la nostra previa Nota dedicata al medesimo argomento [1].

2. Si consideri l'equazione integrale non lineare

$$(1) \quad u(x) = f \left[x, u(x), \int_a^{\varphi(x,u)} M(x, t, u(t)) dt \right],$$

che costituisce un'interessante ed assai vasta estensione delle equazioni integrali di Volterra, ove $f(x, v, w)$, $\varphi(x, v)$ ed $M(x, t, v)$ sono funzioni

(*) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada Grant NRCA-4345 through the University of Alberta.

(**) Nella seduta del 19 giugno 1973.

(1) Università di Stato della R.S.S. Kirghisia. Frunze, Kirg SSR, URSS.

(2) Istituto Politecnico di Iași, Repubblica Socialista Romania. Al presente: Department of Computer Science, Sir George Williams University, Montreal, Quebec, Canada.

(3) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

(4) Ministero della Pubblica Istruzione, Roma, Italia.

note e continue nel dominio

$$\mathfrak{D} = \{a \leq x, t \leq b, 0 \leq |v| \leq r_1, 0 \leq |w| \leq r_2\}$$

e soddisfano in questo dominio le condizioni di Lipschitz rispetto alle variabili v e w , rispettivamente con coefficienti $L_{ij}(x)$ ($i = 1, 2$), $L_\varphi(x)$ e $L_M(x, t)$.

Trascrivendo l'equazione (1) sotto la forma

$$(2) \quad u = Bu,$$

ci proponiamo di escogitare le condizioni dell'esistenza nel dominio $\mathfrak{D}$ del punto fisso spettante all'operatore B .

Siano $u_1(x)$ e $u_2(x)$ due funzioni continue appartenenti al dominio $\mathfrak{D}$ e si ponga

$$\|\cdot\| = \max_{\mathfrak{D}} |\cdot|.$$

L'operatore B trasforma il dominio $\mathfrak{D}$ in una sua parte e si ha

$$\begin{aligned} (3) \quad & \|Bu_2 - Bu_1\| \leq \\ & \leq \left\| L_{1f}(x) + L_{2f}(x) \left[\left\| \int_a^{\varphi(x, u_2)} L_M(x, t) dt \right\| + L_\varphi(x) \|M(x, t, u_1)\| \right] \right\| \cdot \|u_2 - u_1\| \equiv \\ & \equiv \beta \|u_2 - u_1\|. \end{aligned}$$

E pertanto se ne deduce il seguente

TEOREMA 1. *Nelle ipotesi di cui sopra, la condizione $\beta < 1$ assicura la compattezza delle rappresentazioni realizzate dall'operatore B e per conseguenza la validità del principio di Banach di punto fisso per esso operatore e pertanto l'equazione integrale nonlineare (1) possiede nel dominio $\mathfrak{D}$ una soluzione unica che può essere costruita tramite l'applicazione del metodo di approssimazioni successive mediante le formole di ricorrenza*

$$(4) \quad u_n(x) = Bu_{n-1}.$$

Si ha infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$$

(5) e

$$\|u - u_n\| \leq \beta^{n-1} \|u - u_1\| \leq \beta^{n-1} \|u_1 - Bu_1\| : (1 - \beta).$$

L'ultima espressione che figura nella (5) permette il controllo del processo di approssimazione della funzione $u(x)$ - soluzione esatta del problema considerato - tramite la successione delle funzioni $u_1(x), u_2(x), \dots$.

Osservazione. È ben chiaro che le condizioni di convergenza della successione $\{u_n(x)\}$ verso la soluzione esatta $u(x)$ del problema (1) sono molto più deboli nel caso in cui l'equazione (1) ha la forma

$$(6) \quad u(x) = f(x) + \int_a^{\varphi(x, u)} M(x, t) u(t) dt$$

oppure

$$(7) \quad u(x) = f(x) + \int_a^{u(x)} M(x, t) u(t) dt.$$

3. Si consideri adesso l'equazione integro-differenziale non lineare che costituisce una sensibile estensione delle equazioni di Volterra sin'ora considerate, che si riscontra in forme adeguate nella teoria dell'automazione ed è caratterizzata dal fatto di essere implicita rispetto alla derivata della funzione incognita:

$$(8) \quad y'(x) = f \left[x, y(x), y'(x), \int_a^{\varphi(x, y')} \mathcal{K}(x, t, y(t), y'(t)) dt \right]$$

ed aggiungiamo la condizione iniziale

$$(9) \quad y(a) = y_0$$

ove $f(x, u, v, w)$, $\varphi(x, u)$ ed $M(x, t, u, v)$ sono funzioni note e continue nel dominio

$$\mathfrak{D}_1 = \{a \leq x, t \leq b, 0 \leq |u| \leq r_1, 0 \leq |v| \leq r_2, 0 \leq |w| \leq r_3\}, \quad r_i = \text{const.}, \\ (i = 1, 2, 3)$$

e soddisfano le condizioni di Lipschitz rispetto agli argomenti u, v e w , tali condizioni avendo per i coefficienti $L_{y'}(x)$ ($i = \overline{1, 3}$), $L_\varphi(x)$, $L_{i\mathcal{K}}(x, t)$ ($i = 1, 2$) rispettivamente.

Per la risoluzione del problema (8), (9) conviene utilizzare la teoria concernente l'equazione (1). Introduciamo all'uopo la sostituzione

$$(10) \quad y'(x) = z(x).$$

In tal modo il problema dell'integrazione del sistema integro-differenziale non lineare (8), (9) si riduce al problema concernente la seguente equazione integrale

$$(11) \quad z(x) = f \left[x, y_0 + \int_a^x z(\tau) d\tau, z(x), \int_a^{\varphi(x, z)} \mathcal{K} \left(x, t, y_0 + \int_a^t z(\tau) d\tau, z(t) \right) dt \right].$$

Per conseguenza, se l'equazione (11) permette la determinazione della sua soluzione $z(x)$, la soluzione corrispondente al problema (8), (9) sarà data dalla formula

$$(12) \quad y(x) = y_0 + \int_a^x z(\tau) d\tau.$$

Trascriviamo la (11) sotto la forma

$$(13) \quad z = Az.$$

In virtù di ciò che è stato detto sin'ora, l'operatore A trasforma l'insieme $\mathfrak{D}_1$ in una sua parte. Proponiamoci di elucidare le condizioni di compattezza delle rappresentazioni realizzate dall'operatore A .

Siano $z_1(x)$ e $z_2(x) \in \mathfrak{D}_1$. Si ha successivamente

$$\begin{aligned}
 (14) \quad \|Az_2 - Az_1\| &\leq \left\| L_{1f}(x) \left| \int_a^x [z_2(\tau) - z_1(\tau)] d\tau \right| + \right. \\
 &+ L_{2f}(x) |z_2(x) - z_1(x)| + L_{3f}(x) \left| \int_a^{\varphi(x, z_2)} \mathfrak{K} \left(x, t, y_0 + \int_a^t z_2(\tau) d\tau, z_2(t) \right) dt - \right. \\
 &- \left. \int_a^{\varphi(x, z_1)} \mathfrak{K} \left(x, t, y_0 + \int_a^t z_1(\tau) d\tau, z_1(t) \right) dt \right\| \leq \|L_{1f}(x)(x-a) + L_{2f}(x) + \\
 &+ L_{3f}(x) \left[\left| \int_a^{\varphi(x, z_2)} [L_{1\mathfrak{K}}(x, t)(t-a) + L_{2\mathfrak{K}}(x, t)] dt \right| + \right. \\
 &+ \left. L_{\varphi}(x) \left\| \mathfrak{K} \left(x, t, y_0 + \int_a^t z_1(\tau) d\tau, z_1(t) \right) \right\| \right] \|z_2 - z_1\| \equiv \alpha \|z_2 - z_1\|.
 \end{aligned}$$

E pertanto se ne deduce il seguente

TEOREMA 2. *Nelle ipotesi di cui sopra, la condizione $\alpha < 1$ assicura l'unicità della soluzione e la sua esistenza nel dominio $\mathfrak{D}_1$ per l'equazione (11) e dunque anche per il problema (8), (9). Poiché la soluzione $z(x)$ può essere approssimata con precisione fissata dinanzi tramite il metodo delle approssimazioni successive mediante le formole*

$$(15) \quad Z_n = AZ_{n-1},$$

si ottiene successivamente, per $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \|z(x) - Z_n(x)\| &\leq \alpha^{n-1} \|z(x) - Z_1(x)\| \leq \\
 &\leq \alpha^{n-1} \|Z_1(x) - AZ_1\| : (1 - \alpha) = R_n \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

$$(17) \quad y_n(x) = y_0 + \int_a^x Z_n(\tau) d\tau \rightarrow y(x)$$

ed infine

$$(18) \quad |y(x) - y_n(x)| \leq R_n |x - a|, \quad \forall x \in [a, b].$$

In una delle nostre prossime Note insisteremo tra l'altro su alcune applicazioni nell'automazione di certi modelli matematici appartenenti a queste nuove classi di equazioni generalizzate di Volterra, mentre i dettagli algoritmici ed i risultati dei calcoli eseguiti con le calcolatrici elettroniche saranno esposti nel « Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iaşi ».

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. E. KRIVOSHEIN, D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI, *Studi concernenti certe estensioni delle equazioni integro-differenziali di Volterra. I. Problemi di valori iniziali*, «Atti Accad. Naz. dei Lincei», Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. VIII, 54 (2), 187–192 (1973).
- [2] M. PICONE, nel Volume *Duodecim Doctorum Virorum Vitae et Operum Notitia*. Pontificia Academia Scientiarum, Città del Vaticano, A. D. MCMLXX, 117–146.
- [3] D. J. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI, L. E. KRIVOSHEIN e K. V. LEUNG, *Nouveaux problèmes concernant les équations intégral-différentielles non linéaires à plusieurs variables indépendantes. I. Recherche des solutions dans le cas des conditions aux limites initiales-intégrales*, «Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belgique», 5 (5), 1231–1237 (1972).
- [4] M. N. OĞUZTÖRELI, L. E. KRIVOSHEIN e D. J. MANGERON, *Systèmes mathématiques aux structures entremêlées. Nouveaux problèmes « bien posés » concernant une classe d'équations intégral-différentielles non linéaires avec argument retardé*, «Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belgique», 58 (5), 743–749 (1972).