Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur l'équation non linéaire de Schrödinger

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.6, p. 854–859.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_854_0>

Analisi matematica. — *Sur l'équation non linéaire de Schrödinger.*
Nota di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Socio L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dà un teorema di esistenza ed unicità per la soluzione di un problema di Cauchy per una equazione di Schrödinger non lineare.

§ 1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉES

Dans les dérnières temps ont été publié deux résultats sur le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger non linéaire.

Le premier est dû à G. Pozzi et est donné dans la Memoire [3], dediée pour la plupart au problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger linéaire.

Le résultat assure l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger avec de non-linéarité du type lipschitzien.

Un deuxième résultat est dû à C. Bardos et H. Brézis, [1], et assure l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy

$$(1,1) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - i\Delta u(t,x) + |u(t,x)|^{\rho-2} u(t,x) = \\ &\qquad = f(t,x) \qquad \text{p.p. sur } [0,T]\times\Omega \\ &u(t,x) = 0 \qquad \text{p.p. sur } [0,T]\times\Gamma \\ &u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{p.p. sur } \Omega . \end{aligned}$$

où $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert borné de frontière Γ régulière et $\rho \geq 2$.

Ce résultat est deduit d'un résultat abstrait, qui est démontré par des méthodes de monotonie.

Le bût de ce travail est de considérer le problème

$$(1,2) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) + |u(t,x)|^{\rho-2} u(t,x) = \\ &\qquad = f(t,x) \qquad \text{p.p. sur } [0,T]\times\Omega . \\ &u(t,x) = 0 \qquad \text{p.p. sur } [0,T]\times\Gamma . \\ &u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{p.p. sur } \Omega , \end{aligned}$$

où $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert borné de frontière Γ régulière et $\rho \geq 2$, et de donner un résultat d'existence et d'unicité.

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Parma ed Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1973.

Nous observons que dans le cas (1,2) on n'arrive plus à utiliser les méthodes de monotonie, par lesquelles on peut traiter (1,1).

Indiquons $V = H_0^1(\Omega)$, $V^* = H^{-1}(\Omega)$, $W = \mathcal{L}^\rho(\Omega)$, $W^* = \mathcal{L}^{\rho'}(\Omega)$, $H = \mathcal{L}^2(\Omega)$, par $\langle\, , \rangle$ la dualité entre V et V^* et la dualité entre W et W^*, par $(,)$ le produit scalaire dans H, par $|\ |\ (\|\ \|, \|\ \|_w)$ la norme dans H (V, W) et par $\|\ \|^*\ (\|\ \|_w^*)$ la norme dans $V^*\ (W^*)$.

Soit $A : V \to V^*$ défini par la rélation:

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}(x)\, dx$$

$\forall u, v \in V$ et $B : W \to W^*$ défini par la rélation

$$\langle Bu, v\rangle = \int_\Omega |u(x)|^{\rho-2} u(x)\, \bar{v}(x)\, dx .$$

$\forall u, v \in W$.

Notre problème peut alors être écrit en forme faible comme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i}\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Bu(t) = f(t) \quad \text{p.p. sur } [0, T] \text{ dans } V^* + W^* \\ &u(t) \quad \text{faiblement continue sur } [0, T] \quad \text{dans V et dans W.} \\ &u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{1,3}$$

Nous démontrons le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit* $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, *où* $f_1(t)\ (f_2(t))$ *est absolutement continue dans* $V^*\ (W^*)$ *et* $u_0 \in V \cap W$; *il y a alors une solution* $u(t)$ *de* (1,3) *dans* $\mathcal{L}^\infty(0, T; V) \cap \mathcal{L}^\infty(0, T; W)$ *avec* $\frac{du}{dt}(t) \in \mathcal{L}^\infty(0, T; V^*) + \mathcal{L}^\infty(0, T; W^*)$.

Si en plus $\rho \leq \frac{2}{n-2} + 2$, *si* $n > 2$, *ou* ρ *fini arbitraire si* $n = 2$, *alors il y a une unique solution de* (1,3) *dans* $\mathcal{L}^\infty(0, T; V) \cap \mathcal{L}^\infty(0, T; W)$.

Le résultat d'existence est démontré par la méthode de Faedo–Galerkin et de compacité; le résultat d'unicité depende essentiellement du théorème d'injection de Sobolev.

En confrontant les résultats de [1] avec ceux du Théorème 1 on peut remarquer une certaine similitude entre le comportament des deux différents types de non linéarité de l'équation de Schrödinger dans (1,1) et dans (1,2) et les deux type de non linéarité (dans la dérivée de la fonction inconnue et dans la fonction inconnue) de l'équation des ondes ([2], pg. 15, pg. 38).

Je dois enfin remerçier les Professeurs L. Amerio et E. Magenes d'avoir attiré mon attention sur le problème (1,2).

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÈORÉME 1

Soit $\{v_q\}$, $q = 1, 2, \cdots, k, \cdots$ la base orthonormale de H, composée par les vecteurs propres de A et observons que $\{v_q\}$ est aussi une base de V et W.

Indiquons par V_k le sous-espace de H engendré par les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_k$.

Considérons le système

$$(2,1_k) \qquad \frac{1}{i}\left\langle \frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Bu(t), v \right\rangle = \\ = \langle f(t), v\rangle \quad \text{p.p. sur } [0, T], \forall v \in V_k \\ u(0) = u_{0k} \\ u(t) = \sum_{q=1}^{k} \alpha_q(t) v_q$$

où

$$(2,2) \qquad \lim_{k\to\infty} u_{0k} = u_0 \quad \text{dans V et dans W}.$$

Pour les théorèmes classiques sur les systèmes d'équation différentielles ordinaires on peut affirmer que $(2,1_k)$ a une solution locale $u_k(t)$ définie sur $[0, t_k]$.

De $(2,1_k)$ on a

$$(2,3) \qquad \frac{1}{i}\left|\frac{du_k}{dt}(t)\right|^2 + \left\langle Au_k(t), \frac{du_k}{dt}(t)\right\rangle + \\ + \left\langle Bu_k(t), \frac{du_k}{dt}(t)\right\rangle = \left\langle f(t), \frac{du_k}{dt}\right\rangle$$

p.p. sur $[0, t_k]$.

En considérant la partie réelle de (2,3) on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2 + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|_w^\rho = \operatorname{Re}\left\langle f(t), \frac{du_k}{dt}(t)\right\rangle.$$

Indiquons $f(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ et $u_k(t) = v_{1k}(t) + iv_{2k}(t)$; on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2 + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|_w^\rho = \left\langle g_1(t), \frac{dv_{1k}}{dt}(t)\right\rangle = \left\langle g_2(t), \frac{dv_{2k}}{dt}(t)\right\rangle.$$

Dont

$$\frac{1}{2}\|u_k(t)\|^2 + \frac{1}{\rho}\|u_k(t)\|_w^\rho = \frac{1}{2}\|u_{0k}\|^2 + \\ + \frac{1}{\rho}\|u_{0k}\|_w^\rho + \langle g_1(t), v_{1k}(t)\rangle - \langle g_1(0), v_{1k}(0)\rangle - \\ - \int_0^t \left\langle \frac{dg_1}{dt}(\zeta), v_{1k}(\zeta)\right\rangle d\zeta + \langle g_2(t), v_{2k}(t)\rangle - \\ - \langle g_2(0), v_{2k}(0)\rangle - \int_0^t \left\langle \frac{dg_2}{dt}(\zeta), v_{2k}(\zeta)\right\rangle d\zeta.$$

On a alors

$$(2,4)\qquad (\| u_k(t) \|^2 + \| u_k(t) \|_w^\rho) \leq$$

$$\leq K_1 \left(K_2 + 2 \int_0^t \left\| \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}(t) \right\|^* \| u_k(t) \| \,\mathrm{d}t + 2 \int_0^t \left\| \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t}(t) \right\|_w^* \| u_k(t) \|_w \,\mathrm{d}t \right).$$

Dont pour l'inégalité de Gronwall.

$$(2,5)\qquad \| u_k(t) \| \,,\, \| u_k(t) \|_w \leq C_i \qquad \text{p.p.} \quad [0\,,\, t_k]$$

où C est une constante qui ne depende pas de k.

De (2,4) on a aussi que $u_k(t)$ peut être prolongée à une solution de $(2,1_k)$ sur $[0\,,\,T]$ et que on a encore

$$(2,6)\qquad \| u_k(t) \| \,,\, \| u_k(t) \|_w \leq C_2 \qquad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [0\,,\,T]\,.$$

De (2,6) on peut supposer sans perdre de généralité que

$$(2,7)\qquad \lim_{k\to\infty}{}^{**}\, u_k(t) = u(t)$$

dans $\mathfrak{L}^\infty(0\,,\,T\,;\,V)$ et dans $\mathfrak{L}^\infty(0\,,\,T\,;\,W)$,

$$(2,8)\qquad \lim_{k\to\infty}{}^{**}\, Au_k(t) = Au(t)$$

dans $\mathfrak{L}^\infty(0\,,\,T\,;\,V^*)$,

$$(2,9)\qquad \lim_{k\to\infty}{}^{**}\, Bu_k(t) = \chi(t)$$

dans $\mathfrak{L}^\infty(0\,,\,T\,;\,W^*)$.

De (2,8) et (2,9) on a aussi

$$(2,10)\qquad \lim_{k\to\infty}{}^{**}\, \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$$

dans $\mathfrak{L}^\infty(0\,,\,T\,;\,V^*) + \mathfrak{L}^\infty(0\,,\,T\,;\,W^*)$.

De (2,7) et (2,10) on peut supposer sans perdre de généralité

$$(2,11)\qquad \lim_{k\to\infty} u_k(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(0\,,\,T\,;\,H)\,.$$

On peut donc supposer

$$(2,12)\qquad \lim_{k\to\infty} u_k(t\,,\,x) = u(t\,,\,x) \qquad \text{p.p.} \quad \text{sur} \quad [0\,,\,T]\times\Omega$$

donc

$$(2,13)\qquad \lim_{k\to\infty} | u_k(t\,,\,x) |^{\rho-2}\, u_k(t\,,\,x) = | u(t\,,\,x) |^{\rho-2}\, u(t\,,\,x)\,.$$

De (2,9) et (2,13) on peut affirmer, [2], pg. 12, que

$$(2,14)\qquad \chi(t) = Bu(t)$$

De (2,8), (2,9), (2,10), (2,14) on a que $u(t)$ est solution du problème (1,3).

Passons maintenant à la partie concernante l'unicité.

Observons d'abord que sous l'hypothèse $\rho \leq \frac{2}{n-2} + 2$, $n > 2$, on a $\rho - 1 \leq \frac{n}{n-2}$; on peut donc affirmer que sous notres hypothèses on a

$$\mathfrak{L}^{2(\rho-1)}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) = V.$$

Soient $u(t) = u_1(t) + iu_2(t)$, $v(t) = v_1(t) + iv_2(t)$ deux solutions de (1,3) dans $\mathfrak{L}^\infty(0, T; V) \cap \mathfrak{L}^\infty(0, T; W)$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|^2 \leq -\, Im\,\langle Bu(t) - Bv(t), u(t) - v(t)\rangle$$

dont

$$\frac{d}{dt}|u - v| \leq |Bu(t) - Bv(t)|. \tag{2,15}$$

On a

$$\begin{aligned} Bu(t) - Bv(t) &= \left(\sqrt{u_1^2(t,x) + u_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2} u_1(t,x) - \\ &- \left(\sqrt{v_1^2(t,x) + v_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2} v_1(t,x) + i\left[\left(\sqrt{u_1^2(t,x) + u_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2} \cdot\right. \\ &\left.\cdot u_2(t,x) - \left(\sqrt{v_1^2(t,x) + v_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2} v_2(t,x)\right]. \end{aligned} \tag{2,16}$$

On a

$$\begin{aligned} &\left|\left(\sqrt{u_1^2(t,x) + u_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2} u_1(t,x) - \left(\sqrt{v_1^2(t,x) + v_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2} v_1(t,x)\right| \\ &\leq \mathrm{Sup}\left\{(\rho-2)\left(\sqrt{u_1^2(t,x) + u_2^2(t,x)}\right)^{\rho-4} u_1^2(t,x) + \right. \\ &+ \left(\sqrt{u_1^2(t,x) + u_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2}; (\rho-2)\left(\sqrt{v_1^2(t,x) + v_2^2(t,x)}\right)^{\rho-4} v_1^2(t,x) + \\ &+ \left.\left(\sqrt{v_1^2(t,x) + v_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2}\right\} \cdot |u_1(t,x) - v_1(t,x)| + \\ &+ \mathrm{Sup}\left\{(\rho-2)\left(\sqrt{u_1^2(t,x) + u_2^2(t,x)}\right)^{\rho-4} |u_1(t,x)|\,|u_2(t,x)|;\right. \\ &\left.(\rho-2)\left(\sqrt{v_1^2(t,x) + v_2^2(t,x)}\right)^{\rho-4} |v_1(t,x)|\,|v_2(t,x)|\right\} \cdot |u_2(t,x) - v_2(t,x)| \end{aligned}$$

et de façon analogue

$$\begin{aligned} &\left|\left(\sqrt{u_1^2(t,x) + u_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2} u_2(t,x) - \left(\sqrt{v_1^2(t,x) + v_2^2(t,x)}\right) v_2(t,x)\right| \leq \\ &\leq \mathrm{Sup}\left\{(\rho-2)\left(\sqrt{u_1^2(t,x) + u_2^2(t,x)}\right)^{\rho-4} |u_1(t,x)|\,|u_2(t,x)|;\right. \\ &\left.\sqrt{v_1^2(t,x) + v_2^2(t,x)}\;|v_1(t,x)|\,|v_2(t,x)|\right\} |u_1(t,x) - v_1(t,x)| + \\ &+ \mathrm{Sup}\left\{(\rho-2)\left(\sqrt{u_1^2(t,x) + u_2^2(t,x)}\right)^{\rho-4} u_2^2(t,x) + \right. \\ &+ \left(\sqrt{u_1^2(tx) + u_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2}; (\rho-2)\left(\sqrt{v_1^2(t,x) + v_2^2(t,x)}\right)^{\rho-4} v_2^2(t,x) + \\ &+ \left.\left(\sqrt{v_1^2(t,x) + v_2^2(t,x)}\right)^{\rho-2}\right\} . |u_2(t,x) - v_2(t,x)|. \end{aligned}$$

En se rappellant que le supremum de deux fonctions de $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ est dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et que dans notres hypothèses on a $\mathfrak{L}^{2(\rho-2)} \hookrightarrow H_0^1(\Omega) = V$, on peut affirmer que

$$| Bu(t) - Bv(t) | \leq C | u(t) - v(t) | ,$$

dont

$$\frac{d}{dt} | u(t) - v(t) | \leq C | u(t) - v(t) | .$$

Pour le lemme de Gronwall on a alors $| u(t) - v(t) | = 0 \Rightarrow u(t) = v(t)$.
Le Théorème 1 est ainsi complètement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARDOS C. et BRÉZIS H., *Sur une classe de problèmes non linéaires*, « C. R. Ac. Sc. Paris », *266*, 56–59 (1968).

[2] LIONS J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier Villars 1969.

[3] POZZI G. A., *Problemi di Cauchy e problemi ai limiti per equazioni d'evoluzione del tipo di Schrödinger lineari e non lineari I, II*, « Ann. Mat. », serie IV, *78*, 197–258 (1968); *81*, 205–248 (1969).