Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Di Maio, Nicola Melone

Nuclei nella categoria dei gruppidi associata ad una categoria astratta

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.6, p. 838–847.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_838_0>

Algebra. — *Nuclei nella categoria dei gruppidi associata ad una categoria astratta* (*). Nota di GIUSEPPE DI MAIO e NICOLA MELONE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In the present paper, following a previous one by the same Authors [2], we state a sufficient condition for the existence of *kernels* for homomorphisms between inversive semigroups in an abstract category.

1. – INTRODUZIONE

In un precedente Lavoro (cfr. [2]) ci siamo occupati dell'introduzione della struttura di gruppide sugli oggetti di una categoria astratta $\mathcal{C}$ e della relativa nozione di omomorfismo, pervenendo alla costruzione della categoria dei gruppidi associata a $\mathcal{C}$. Scopo della presente Nota è dare una definizione di nucleo in una tale categoria. L'interesse del problema risiede nell'impossibilità di utilizzare le consuete tecniche categoriche in quanto la categoria dei gruppidi associata a $\mathcal{C}$, in generale, è priva di oggetto nullo. La via più naturale per dare una tale definizione ci è parsa quella di generalizzare il caso algebrico mediante la rappresentabilità di un opportuno funtore definito sulla categoria $\mathcal{C}$. Abbiamo poi affrontato il problema di interpretare categoricamente tale definizione, mostrando che essa si riconduce alla nozione classica di nucleo di una coppia di morfismi. Esporremo ora brevemente i risultati ottenuti.

Nel n. 2, per completezza espositiva, richiameremo alcune definizioni e proposizioni contenute in [2] che interverranno sistematicamente nel seguito.

Nel n. 3 formuleremo la definizione di nucleo di un omomorfismo tra gruppidi in una categoria astratta e daremo una condizione sufficiente per la sua esistenza.

Nel n. 4 interpreteremo categoricamente la definizione proposta, supponendo dapprima che la categoria $\mathcal{C}$ sia dotata di prodotti finiti, generalizzando poi i risultati ad una categoria qualsiasi.

2. – LE CATEGORIE $\mathrm{Gpd}(\mathcal{C})$ E $\mathrm{Gpd}_M(\mathcal{C})$

Sia $\mathcal{C}$ una categoria astratta e Gpd (Ens) la categoria dei gruppidi in senso algebrico (cfr. [3]). Una terna $(G, U \xrightarrow{u} G, \sigma)$, costituita da un oggetto G di $\mathcal{C}$, da un sotto-oggetto $U \xrightarrow{u} G$ di G e da un funtore $\sigma : \mathcal{C} \to \mathrm{Gpd}(\mathrm{Ens})$,

(*) Lavoro eseguito quali ricercatori del C.N.R. nell'ambito del G.N.S.A.G.A.
(**) Nella seduta del 19 giugno 1973.

si dice un gruppide in $\mathcal{C}$ se:

G 1) *È commutativo il diagramma*:

(2.1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "h_G"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \mathrm{Ens} \\ & \mathrm{Gpd}\,(\mathrm{Ens}) \arrow[u, "D"'] \end{tikzcd} ,$$

G 2) *Il funtore* $U : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$, *che associa ad ogni* X *di* $\mathcal{C}$ *l'insieme* $U(X) = U_X$ *degli idempotenti di* $D(\sigma(X)) = \mathrm{Hom}(X, G)$, *è rappresentato dalla coppia* $(U, U \xrightarrow{u} G)$; *ovvero vale l'uguaglianza*:

(2.2)
$$U_X = h(X, u)(h_U(X)), \quad \forall X \in \mathcal{C}.$$

Nel seguito, se $(A_1 \times A_2, p_1, p_2)$ è un prodotto degli oggetti A_1, A_2, per ogni coppia di morfismi $X \xrightarrow{x} A_1$ e $X \xrightarrow{y} A_2$, denoteremo con $X \xrightarrow{[x,y]} A_1 \times A_2$ l'unico morfismo che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} A_1 & A_1 \times A_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & A_2 \\ & X \arrow[ul, "x"] \arrow[u, "{[x,y]}"'] \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd}$$

Ciò premesso, in una categoria $\mathcal{C}$ dotata di prodotti finiti si ha:

I. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché una terna* $(G, U \xrightarrow{u} G, \sigma)$ *sia un gruppide in* $\mathcal{C}$ *è che esistano due morfismi* $G \times G \xrightarrow{m} G$, $G \xrightarrow{a} G$ *tali che*:

SM 1) *Siano commutativi i diagrammi*:

(2.3)
$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "m \times 1_G"] \arrow[d, "1_G \times m"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd} ,$$

(2.4)
$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "m \times 1_G"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[u, "{[1_G, a, 1_G]}"] \arrow[r, "1_G"] & G \end{tikzcd} ,$$

(2.5)
$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "m \times 1_G"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[u, "{[a, 1_G, a]}"] \arrow[r, "a"] & G \end{tikzcd} ;$$

SM 2) *Il sotto-oggetto* $U \xrightarrow{u} G$ *sia soluzione universale rispetto alla commutatività del diagramma*:

(2.6)
$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[rr, "m"] & & G \\ U\times U \arrow[u, "u\times u"] & & U \arrow[ll, "\Delta"'] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd} ;$$

SM 3) *Sia commutativo il diagramma*:

(2.7)
$$\begin{tikzcd} & G & \\ G\times G \arrow[ur, "m"] & & G\times G \arrow[ul, "m"'] \\ U\times U \arrow[u, "u\times u"] \arrow[r, "u\times u"] & G\times G \arrow[ur, "{[P_2,P_1]}"'] & \end{tikzcd} .$$

Tale proposizione consente di definire gruppide in una categoria $\mathcal{C}$, dotata di prodotti finiti, ogni quaterna $(G\, , G\times G \xrightarrow{m} G\, , U \xrightarrow{u} G\, , G \xrightarrow{a} G)$ verificante gli assiomi SM 1), SM 2) ed SM 3).

Per il seguito, un gruppide di sostegno G sarà da noi denotato con il simbolo (G), sempre che ciò non dia luogo ad equivoci.

Se $(G_i) = (G_i\, , U_i \xrightarrow{u_i} G_i\, , \sigma_i)_{i=1,2}$ sono due gruppidi in $\mathcal{C}$, diremo omomorfismo tra essi ogni trasformazione naturale $f: \sigma_1 \to \sigma_2$. In una categoria $\mathcal{C}$, dotata di prodotti finiti, un omomorfismo tra due gruppidi $(G_i) = (G_i\, , G_i\times G_i \xrightarrow{m_i} G_i\, , U_i \xrightarrow{u_i} G_i\, , G_i \xrightarrow{a_i} G_i)_{i=1,2}$ è, equivalentemente, un morfismo $f: G_1 \to G_2$ che rende commutativo il diagramma:

(2.8)
$$\begin{tikzcd} G_1\times G_1 \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "m_1"'] & G_2\times G_2 \arrow[d, "m_2"] \\ G_1 \arrow[r, "f"] & G_2 \end{tikzcd} .$$

Denoteremo con Gpd $(\mathcal{C})$ e con $\mathrm{Gpd}_M(\mathcal{C})$ rispettivamente le categorie dei gruppidi, nel senso della prima e seconda definizione, associate a $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ è dotata di prodotti finiti, si riconosce subito che le categorie Gpd $(\mathcal{C})$ e $\mathrm{Gpd}_M(\mathcal{C})$ sono equivalenti. Diremo, infine, sottogruppide di un gruppide (G), oggetto di Gpd $(\mathcal{C})$ (rispettivamente di $\mathrm{Gpd}_M(\mathcal{C})$), ogni suo sotto-oggetto nella categoria Gpd $(\mathcal{C})$ (risp. in $\mathrm{Gpd}_M(\mathcal{C})$).

3. – Definizione di nucleo di un omomorfismo tra gruppidi

Siano $(G_i) = (G_i \,,\, U_i \xrightarrow{u_i} G_i \,,\, \sigma_i)_{i=1,2}$ due oggetti di Gdp $(\mathcal{C})$ ed $f : \sigma_1 \to \sigma_2$ un omomorfismo tra essi. Considerato il funtore:

$$\text{Ker} f : X \in \mathcal{C} \to \text{Ker} f(X) \in \text{Ens}\,, \tag{3.1}$$

(ove $\text{Ker} f(X) = \{X \to G_1 / X \to G_1 \xrightarrow{f} G_2 \in U_{2X}\}$ e con $f : G_1 \to G_2$ abbiamo indicato il morfismo indotto, a norma del Teorema di Yoneda, dalla trasformazione naturale f), diremo che l'omomorfismo $f : (G_1) \to (G_2)$ ammette nucleo se il funtore (3.1) è rappresentabile. Chiameremo nucleo di f ogni rappresentante $(K \,,\, K \xrightarrow{k} G_1)$ di Ker f.

Proviamo che:

I. – *Sia* $f : (G_1) \to (G_2)$ *un omomorfismo. Il nucleo di* f, *se esiste, è un sottogruppide di* (G_1).

Dimostrazione. Sia $(K \,,\, K \xrightarrow{k} G_1)$ un rappresentante di Ker f. Osserviamo che $K \xrightarrow{k} G_1$ è monomorfismo, in quanto, essendo $h(X \,,\, k) :$ $\text{Hom}(X \,,\, K) \to \text{Ker}\ f(X) \subseteq \text{Hom}(X \,,\, G_1)$ biettiva, è iniettiva per ogni $X \in \mathcal{C}$ l'applicazione $h(X \,,\, k)$: $\text{Hom}(X \,,\, K) \to \text{Hom}(X \,,\, G_1)$.

Dalla definizione di rappresentante segue, in particolare, che esiste un unico morfismo $U_1 \xrightarrow{r} K$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "r"'] & G_1 \\ & K \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd} \quad . \tag{3.2}$$

Essendo, per ogni X di $\mathcal{C}$, $h(X \,,\, k)$ una biezione tra $\text{Hom}(X \,,\, K)$ e $\text{Ker} f(X)$, l'insieme $\text{Hom}(X \,,\, K)$ si può dotare in maniera naturale di una struttura di gruppide. Ha senso, pertanto, considerare il funtore:

$$\sigma' : X \in \mathcal{C} \to \sigma'(X) = \text{Hom}(X \,,\, K) \in \text{Gpd}(\text{Ens}). \tag{3.3}$$

Proviamo che la terna $(K \,,\, U_1 \xrightarrow{r} K \,,\, \sigma')$ è un gruppide. Essendo ovvia la proprietà G 1), mostriamo che è valida la G 2), cioè:

$$U_{1X} = h(X \,,\, r)(h_{U_1}(X))\,,$$

ove abbiamo denotato ancora con U_{1X} il sottoinsieme degli idempotenti di $\sigma'(X)$. Per come è stato definito il gruppide $\sigma'(X)$ si ha: $X \to K$ idempotente

$\Longleftrightarrow X \to K \xrightarrow{k} G_1$ idempotente di $\sigma_1(X) \Longleftrightarrow \exists X \to U_1$ che rende commutativo il diagramma:

(3.4)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[drr] & K \arrow[r, "k"] & G_1 \\ & & U_1 \arrow[u, "u_1"'] \arrow[ul, "r"] \end{tikzcd} .$$

Dalla (3.2) e dall'essere k monomorfismo segue inoltre che $X \to K$ verifica la (3.4) se, e soltanto se, è commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & K \\ & U_1 \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd} .$$

Si ha pertanto:

$$U_{1X} = \{X \to K / X \to K \text{ idempotente}\} =$$
$$= \{X \to K / \exists\, !\, X \to U_1 \,,\, X \to K = X \to U_1 \xrightarrow{r} K\} = h(X, r)(h_{U_1}(X)).$$

Il gruppide $(K, U_1 \xrightarrow{r} K, \sigma')$ è poi un sottogruppide di (G_1) in quanto l'applicazione $h(X, k) : \mathrm{Hom}(X, K) \to \mathrm{Hom}(X, G_1)$ è un monomorfismo in Gpd (Ens) per ogni X di $\mathcal{C}$; la trasformazione naturale $h(-, k) : \sigma' \to \sigma_1$ è, dunque, un monomorfismo in Gpd $(\mathcal{C})$. L'asserto è, così, completamente provato.

Per quanto concerne l'esistenza del nucleo di un omomorfismo di Gpd $(\mathcal{C})$ vale la proposizione:

II. – *Condizione sufficiente affinché* Gpd $(\mathcal{C})$ *ammetta nuclei è che* $\mathcal{C}$ *possieda prodotti fibrati.*

Dimostrazione. Sia $f : (G_1) \to (G_2)$ un omomorfismo. Considerato il prodotto fibrato:

(3.5)
$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] & G_2 \\ G_1 \times_{G_2} U_2 \arrow[u, "p"] \arrow[r, "q"] & U_2 \arrow[u, "u_2"'] \end{tikzcd} ,$$

proviamo che la coppia $(G_1 \times_{G_2} U_2 \,,\, G_1 \times_{G_2} U_2 \xrightarrow{p} G_1)$ è un rappresentante del funtore (3.1); deve esistere, cioè, un isomorfismo funtoriale tra i funtori

$h_{G_1 \times_{G_2} U_2}$ e Ker f. All'uopo osserviamo che, per ogni $X \in \mathcal{C}$, l'applicazione: $h(X, p)$: Hom $(X, G_1 \times_{G_2} U_2) \to$ Hom (X, G_1) si può interpretare, a norma della (3.5), come applicazione tra Hom $(X, G_1 \times_{G_2} U_2)$ e Ker $f(X)$; cioè

$$h(X, p) : \mathrm{Hom}(X, G_1 \times_{G_2} U_2) \to \mathrm{Ker} f(X). \tag{3.6}$$

Essa è una biezione, si ha infatti:

$$X \to G_1 \in \mathrm{Ker} f(X) \Longleftrightarrow \exists X \to U_2 \,/\, \begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u_2} \\ X & \longrightarrow & U_2 \end{array} \text{ commuta}$$

e di qui, per la definizione di prodotto fibrato, segue l'esistenza di un unico morfismo $X \to G_1 \times_{G_2} U_2$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & G_1 \\ X \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & G_1 \times_{G_2} U_2 \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] \\ & U_2 \end{tikzcd} .$$

L'asserto è, dunque, provato.

4. – L'INTERPRETAZIONE CATEGORICA DELLA DEFINIZIONE DI NUCLEO

Osserviamo che, se $(G, \cdot)$ è un gruppide in Ens, una caratterizzazione degli idempotenti è:

$$a \in G \text{ idempotente} \Longleftrightarrow a = a \cdot a^{-1}. \tag{4.1}$$

Tale osservazione permette di definire, in Ens, il nucleo di un omomorfismo mediante la commutatività di un opportuno diagramma. Generalizzando tale situazione si ha:

I. – *Sia* $\mathcal{C}$ *una categoria dotata di prodotti finiti ed* $f : (G_1) \to (G_2)$ *un morfismo di* $\mathrm{Gpd}_M(\mathcal{C})$. *Denotato con* $G_1 \xrightarrow{0_f} G_2$ *il seguente morfismo di* $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} G_1 \times G_1 \arrow[rr, "{[f, a_2 f]}"] & & G_2 \times G_2 \arrow[d, "m_2"] \\ G_1 \arrow[u, "\Delta"] \arrow[rr, "0_f"] & & G_2 \end{tikzcd} , \tag{4.2}$$

ogni rappresentante del funtore (3.1) *è un nucleo in* $\mathcal{C}$ *della coppia di morfismi* $G_1 \xrightarrow{f} G_2$, $G_1 \xrightarrow{0_f} G_2$; *e viceversa.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $(K, K \xrightarrow{p} G_1)$ un rappresentante del funtore (3.1). Bisogna verificare che:

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] & G_2 \\ K \arrow[u, "p"] \arrow[r, "p"] & G_1 \arrow[u, "0_f"'] \end{tikzcd} \quad \text{commuta;} \tag{4.3}$$

$$\left(\forall Z \xrightarrow{l} G_1 \,/\, \underset{\text{commuta}}{\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] & G_2 \\ Z \arrow[u, "l"] \arrow[r, "l"'] & G_1 \arrow[u, "0_f"'] \end{tikzcd}} \right) \Rightarrow \left(\exists!\, Z \xrightarrow{t} K \,/\, \underset{\text{commuta}}{\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "t"'] & G_1 \\ & K \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}} \right). \tag{4.4}$$

La (4.3) equivale alla commutatività, per ogni X di $\mathcal{C}$, del diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X, G_1) \arrow[r, "h(X, f)"] & \mathrm{Hom}(X, G_2) \\ \mathrm{Hom}(X, K) \arrow[u, "h(X, p)"] \arrow[r, "h(X, p)"] & \mathrm{Hom}(X, G_1) \arrow[u, "h(X, 0_f)"'] \end{tikzcd} . \tag{4.5}$$

Per ogni $X \xrightarrow{x} K$ si ha:

$h(X, f)(h(X, p)(X \xrightarrow{x} K)) = X \xrightarrow{x} K \xrightarrow{p} G_1 \xrightarrow{f} G_2 \in U_{2X}$, essendo (K, p) un rappresentante di $\operatorname{Ker} f$. D'altra parte, per le (4.2) e (4.1), sussiste la relazione:

$$\begin{aligned} h(X, 0_f)(h(X, p)(X \xrightarrow{x} K)) &= X \xrightarrow{x} K \xrightarrow{p} G_1 \xrightarrow{0_f} G_2 = \\ &= X \xrightarrow{x} K \xrightarrow{p} G_1 \xrightarrow{\Delta} G_1 \times G_1 \xrightarrow{[f, a_2 f]} G_2 \times G_2 \xrightarrow{m_2} G_2 = \\ &= X \xrightarrow{fpx} G_2 \xrightarrow{[1, a_2]} G_2 \times G_2 \xrightarrow{m_2} G_2 = X \xrightarrow{[fpx, a_2 fpx]} G_2 \times G_2 \xrightarrow{m_2} G_2 = \\ &= (fpx) * (fpx)^{-1} = fpx = h(X, f)(h(X, p)(X \xrightarrow{x} K)); \end{aligned}$$

la (4.3) è pertanto dimostrata.

Se $Z \xrightarrow{l} G_1$ verifica le ipotesi della (4.4), per ogni X di $\mathcal{C}$, è commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X, G_1) \arrow[r, "h(X, f)"] & \mathrm{Hom}(X, G_2) \\ \mathrm{Hom}(X, Z) \arrow[u, "h(X, l)"] \arrow[r, "h(X, l)"] & \mathrm{Hom}(X, G_1) \arrow[u, "h(X, 0_f)"'] \end{tikzcd} . \tag{4.6}$$

Dalla (4.6) segue:

$$(4.7)\qquad h(X, f)\,(h(X, l)\,(\mathrm{Hom}(X, Z))) \subseteq U_{2X},$$

in quanto, per ogni $X \xrightarrow{z} Z$, si ha: $flz = X \xrightarrow{z} Z \xrightarrow{l} G_1 \xrightarrow{f} G_2 = X \xrightarrow{z} Z \xrightarrow{l} G_1 \xrightarrow{0_f} G_2 = X \xrightarrow{lz} G_1 \xrightarrow{[f, a_2 f]} G_2 \xrightarrow{m_2} G_2 = (flz) * (flz)^{-1}$.

La (4.7) mostra che:

$$(4.8)\qquad h(X, l)\,(\mathrm{Hom}(X, Z)) \subseteq \mathrm{Ker} f(X),$$

inoltre, per la definizione di rappresentante si ha:

$$(4.9)\qquad \forall X \to Z,\ \exists!\, X \to K / X \to Z \xrightarrow{l} G_1 = X \to K \xrightarrow{p} G_1.$$

In base alla (4.9), per $X = Z$ ed $X \to Z = Z \xrightarrow{1} Z$, esiste ed è unico il morfismo $Z \to K$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "l"] \arrow[dr] & G_1 \\ & K \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd},$$

la (4.4) è così provata.

$\Leftarrow$. Sia $(K, K \xrightarrow{p} G_1) = \mathrm{Ker}(f, 0_f)$. Per ogni X di $\mathcal{C}$, l'applicazione

$$h(X, p) : \mathrm{Hom}(X, K) \to \mathrm{Hom}(X, G_1)$$

può pensarsi come applicazione tra $\mathrm{Hom}(X, K)$ e $\mathrm{Ker} f(X)$.

Si ha infatti per ogni $X \xrightarrow{x} G_1$:

$$fpx = X \xrightarrow{x} K \xrightarrow{p} G_1 \xrightarrow{f} G_2 = X \xrightarrow{x} K \xrightarrow{p} G_1 \xrightarrow{0_f} G_2 =$$

$$= X \xrightarrow{px} G_1 \xrightarrow{[f, a_2 f]} G_2 \times G_2 \xrightarrow{m_2} G_2 =$$

$$= X \xrightarrow{[fpx, a_2 fpx]} G_2 \times G_2 \xrightarrow{m_2} G_2 = (fpx) * (fpx)^{-1},$$

ovvero, per la (4.1),

$$X \xrightarrow{x} K \xrightarrow{p} G_1 \xrightarrow{f} G_2 \in U_{2X}$$

e quindi

$$X \xrightarrow{x} K \xrightarrow{p} G_1 \in \mathrm{Ker} f(X).$$

Proviamo che, per ogni X di $\mathcal{C}$, l'applicazione

$$h(X, p) : \mathrm{Hom}(X, K) \to \mathrm{Ker} f(X)$$

è biettiva. Se infatti $X \xrightarrow{x} G_1 \in \operatorname{Ker} f(X)$, per la (4.1) è commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] & G_2 \\ X \arrow[u, "x"] \arrow[r, "x"] & G_1 \arrow[u, "o_f"'] \end{tikzcd} ,$$

di qui, per la definizione di nucleo, segue l'esistenza di un unico morfismo $X \to K$ tale che: $X \to K \xrightarrow{p} G_1 = X \xrightarrow{x} G_1$. $(K, K \xrightarrow{p} G_1)$ è pertanto un rappresentante del funtore (3.1); la condizione sufficiente è così dimostrata.

Proviamo che:

II. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché un omomorfismo* $f: (G_1) \to (G_2)$ *di* $\mathrm{Gpd}_M(\mathcal{C})$ *fattorizzi attraverso* $U_2 \xrightarrow{u_2} G_2$ *è che* $\operatorname{Ker} f$ *ammetta come rappresentante la coppia* $(G_1, G_1 \xrightarrow{1} G_1)$.

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Nelle ipotesi poste, f è un idempotente del gruppide $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$, dalla (4.1) segue pertanto:

$$o_f = m_2(f \times a_2 f)\Delta = m_2[f, a_2 f] = f *_2 f^{-1} = f.$$

Essendo

$$\operatorname{Ker}(f, o_f) = \operatorname{Ker}(f, f) = (G_1, G_1 \xrightarrow{1} G_1),$$

l'asserto segue direttamente dalla Proposizione I, n. 4.

$\Leftarrow$. Dall'ipotesi e dalla Proposizione I, n. 4 si ha che:

$$(G_1, G_1 \xrightarrow{1} G_1) = \operatorname{Ker}(f, o_f),$$

ovvero $f = o_f$. Nel gruppide $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ sussiste allora la relazione:

$$f = o_f = m_2(f \times a_2 f)\Delta = m_2[f, a_2 f] = f *_2 f^{-1},$$

cioè, a norma della (3.1), f è un idempotente di $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ e pertanto fattorizza attraverso $U_2 \xrightarrow{u_2} G_2$.

La proposizione è così provata.

Osserviamo infine che, se $\mathcal{C}$ è priva di prodotti finiti ed $f: (G_1) \to (G_2)$ è un omomorfismo di $\mathrm{Gpd}(\mathcal{C})$, denotato ancora con $f: G_1 \to G_2$ il morfismo in $\mathcal{C}$ indotto dalla trasformazione naturale f, si prova subito che:

III. – *La legge* O_f *che, ad ogni* X *di* $\mathcal{C}$, *associa l'applicazione*

$$O_{f(X)}: x \in \mathrm{Hom}(X, G_1) \to (fx)\cdot(fx)^{-1} \in \mathrm{Hom}(X, G_2),$$

è una trasformazione naturale tra i funtori h_{G_1} *ed* h_{G_2}.

Ha senso, allora, considerare il morfismo $o_f: G_1 \to G_2$ di $\mathcal{C}$ indotto dalla trasformazione naturale O_f.

Sussiste la proposizione:

IV. – *La coppia* $(K, K \xrightarrow{p} G_1)$ *è un rappresentante del funtore* $\operatorname{Ker} f$ *se, e soltanto se, è un nucleo della coppia* (f, o_f) *in* $\mathcal{C}$.

Dimostrazione. Osservato che, per ogni $X \in \mathcal{C}$, l'applicazione $h(X, o_f) = O_{f(X)}$, che interviene attualmente, coincide con l'applicazione $h(X, o_f)$ del diagramma (4.5), la dimostrazione è sostanzialmente la stessa di quella fornita per stabilire la Proposizione I del n. 4.

BIBLIOGRAFIA

[1] I. BUCUR e A. DELEANU, *Introduction to the theory of categories and functors*, J. Wiley e Sons, Ltd. 1968.

[2] G. DI MAIO e N. MELONE, *Gruppidi in una categoria*, « Ricerche di Matematica », 1973 (in corso di stampa).

[3] G. TALLINI, *Sulla struttura algebrica delle trasformazioni tra parti di un insieme*, « Ann. Mat. Pura ed Appl. », ser. IV, *71*, 295–322.