
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ELISABETTA STRICKLAND

**Classificazione dei gruppi finiti semplici in cui due
arbitrari sottogruppi dello stesso ordine risultano
coniugati**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.6, p. 832–837.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_6_832_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Classificazione dei gruppi finiti semplici in cui due arbitrari sottogruppi dello stesso ordine risultano coniugati* (*). Nota di ELISABETTA STRICKLAND, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper we give the classification of finite simple groups in which any two subgroups of the same order are conjugate. If G is such a group, one of the following three statements must hold:

- 1) G is isomorphic to $\text{PSL}(2, 4) \cong \text{PSL}(2, 5) \cong A_5$;
- 2) G is isomorphic to $\text{PSL}(2, 8)$;
- 3) G is isomorphic to $\text{PSL}(2, p)$, p a prime, $p > 5$, $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{5}$.

INTRODUZIONE

Sia (C) la classe dei gruppi finiti in cui due arbitrari sottogruppi dello stesso ordine risultano coniugati. Nel caso risolubile, tali gruppi sono stati studiati da A. Machí [1], C. de Vivo [2] ed E. Strickland [3].

Il presente lavoro si propone di classificare i gruppi semplici appartenenti alla classe (C). Questa classe è contenuta nella classe (O) dei gruppi finiti in cui due arbitrari sottogruppi dello stesso ordine sono isomorfi; la struttura dei sottogruppi di Sylow degli O-gruppi è stata determinata da R. Armstrong [4]: essi possono soltanto essere

- (i) ciclici, oppure
- (ii) abeliani elementari, od infine
- (iii) non abeliani di ordine p^3 ed esponente p , se p è un primo dispari, quaternioni, se $p = 2$.

Ne segue che, dato un C-gruppo semplice, G , un suo 2-sottogruppo di Sylow S_2 sarà abeliano elementare di ordine 2^m , con $m \geq 2$: infatti S_2 non può essere ciclico, altrimenti, per un risultato di W. Burnside ([5], VII 4.3) G non sarebbe semplice; inoltre la teoria dei caratteri modulari è stata usata da R. Brauer e M. Suzuki [6] per dimostrare la non semplicità di un gruppo con un 2-sottogruppo di Sylow quaternionico.

Le precedenti osservazioni ci permettono di usare il lavoro di J. H. Walter [7] sui gruppi finiti semplici dotati di 2-sottogruppi di Sylow abeliani.

(*) Lavoro svolto nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche, Geometriche e loro Applicazioni, del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 19 giugno 1973.

Il risultato fondamentale su questi è il seguente:

TEOREMA (Walter). *Se G è un gruppo semplice finito non abeliano con 2-sottogruppi di Sylow abeliani S_2 , allora si ha necessariamente una delle seguenti tre possibilità:*

(i) G è isomorfo a $\text{PSL}(2, q)$, gruppo delle trasformazioni lineari fratte

$$x \rightarrow \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \text{GF}(q)$$

ed $ad - bc \neq 0$, ove $ad - bc$ è un quadrato in $\text{GF}(q)$, $q = p^n$, p primo, n intero positivo, $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$, $q > 3$, oppure $q = 2^n$, $n \geq 2$;

(ii) G è isomorfo a $J(11)$, gruppo di Janko;

(iii) G è un gruppo del tipo di Ree, cioè i suoi 2-sottogruppi di Sylow sono abeliani elementari di ordine 8 e per ogni involuzione x , si ha che $C_G(x) = \langle x \rangle \times L$, ove L è isomorfo a $\text{PSL}(2, q)$, con $q = p^n \equiv 3, 5 \pmod{8}$, $q > 3$.

Per i nostri fini sarà utilizzabile solo il primo caso del teorema ora enunciato, in quanto (ii) e (iii) possono senz'altro venire scartati dalle presenti considerazioni; infatti il gruppo di Janko $J(11)$ non è un C-gruppo, dal momento che possiede esattamente due classi di sottogruppi coniugati isomorfi ad A_5 ([8], 8.3); inoltre i gruppi del tipo di Ree in (iii) possiedono 3-sottogruppi di Sylow S_3 che non appartengono a nessuno dei tre tipi consentiti dalla caratterizzazione di R. Armstrong [9].

Dunque, tenendo anche conto del fatto che per $p > 2$, un 2-sottogruppo di Sylow di $\text{PSL}(2, p^n)$ è un sottogruppo di Klein se e soltanto se $p^n = q \equiv 3, 5 \pmod{8}$ ([5], XV.1.1), per un C-gruppo semplice G di cui S_2 è un 2-sottogruppo di Sylow abeliano elementare di ordine 2^m , $m \geq 2$, si ottengono unicamente le possibilità seguenti:

(1) se $m = 2$, $G \cong \text{PSL}(2, 4)$ oppure $G \cong \text{PSL}(2, p^n)$, con $p^n = q \equiv 3, 5 \pmod{8}$, $q > 3$;

(2) se $m = 3$, $G \cong \text{PSL}(2, 8)$;

(3) se $m > 3$, $G \cong \text{PSL}(2, 2^n)$, $n > 3$.

Abbiamo così ridotto il problema alla ricerca dei gruppi dei tipi (1), (2), (3) che sono C-gruppi.

Dimostreremo che i C-gruppi semplici sono precisamente i seguenti:

(i) $\text{PSL}(2, 4) \cong \text{PSL}(2, 5) \cong A_5$, gruppo alterno su cinque elementi;

(ii) $\text{PSL}(2, 8)$;

(iii) $\text{PSL}(2, p)$, p primo, $p > 5$, $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{5}$.

Nella deduzione di questi risultati, avrà importanza fondamentale la conoscenza della struttura dei sottogruppi dei gruppi $\text{PSL}(2, p^n)$, offerta in [10], (11.8.27) ed in [11], (§ 260).

§ 1. C-GRUPPI SEMPLICI DEL TIPO $\text{PSL}(2, 2^n)$, $n \geq 2$.

PROPOSIZIONE 1.1. $\text{PSL}(2, 4)$ è un C-gruppo.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che $\text{PSL}(2, 4) \cong A_5$ ([10], 11.6.14) ed A_5 è un C-gruppo.

PROPOSIZIONE 1.2. $\text{PSL}(2, 8)$ è un C-gruppo.

Dimostrazione. Da ([11], XII) si deduce che $|\text{PSL}(2, 8)| = 2^3 \cdot (2^6 - 1) = 504 = 7 \cdot 3^2 \cdot 2^3$; tutti e soli i sottogruppi di $\text{PSL}(2, 8)$ sono i seguenti:

(1) $2^3 + 1 = 9$, 2-sottogruppi di Sylow S_2 abeliani elementari di ordine 8, coniugati, ad intersezione a due a due identica;

(2) $7 \cdot 9 = 63$ sottogruppi ciclici di ordine 2; questi sono tutti coniugati, come segue da [11] § 249, assumendo $k = 1$, $p = 2$, $n = 3$;

(3) $7 \cdot 9 = 63$ sottogruppi isomorfi a gruppi di Klein, coniugati, come segue da [11], § 249, assumendo $k = 1$, $p = 2$, $n = 3$;

(4) $\frac{1}{2} \cdot 2^3 \cdot (2^3 + 1) = 36$ sottogruppi ciclici coniugati, di ordini $2^3 - 1 = 7$, 7-sottogruppi di Sylow di $\text{PSL}(2, 8)$;

(5) $\frac{1}{2} \cdot 2^3 \cdot (2^3 - 1) = 28$ sottogruppi ciclici coniugati, di ordine $2^3 + 1 = 9$, 3-sottogruppi di Sylow di $\text{PSL}(2, 8)$;

(6) 28 sottogruppi ciclici di ordine 3;

(7) $\frac{504}{2 \cdot 3} = 84$ sottogruppi diedrali di ordine 6, $D_{2,3} \cong S_3$, coniugati, ove S_3 è il gruppo simmetrico su tre elementi;

(8) $\frac{504}{2 \cdot 9} = 28$ sottogruppi diedrali di ordine 18, $D_{2,9}$, coniugati;

(9) $\frac{504}{2 \cdot 7} = 36$ sottogruppi diedrali di ordine 14, $D_{2,7}$, coniugati;

(10) prodotti semidiretti dei 2-sottogruppi di Sylow S_2 con i gruppi ciclici di ordine 7: tali prodotti sono tutti coniugati, perché normalizzanti in $\text{PSL}(2, 8)$ degli S_2 ;

infine vi sono 84 sottogruppi isomorfi a $\text{PSL}(2, 2)$, ma essi non sono altro che i diedrali $D_{2,3}$ di cui in (7).

Si conclude che due arbitrari sottogruppi dello stesso ordine di $\text{PSL}(2, 8)$ risultano coniugati.

Consideriamo ora i gruppi $\text{PSL}(2, 2^n)$, per $n > 3$. Da [11], XII, si trae che in $\text{PSL}(2, 2^n)$ vi sono $2^n + 1$, 2-sottogruppi di Sylow S_2 ad intersezione a due a due identica, abeliani elementari di ordine 2^n , $n > 3$.

I sottogruppi di ordine $2^2 = 4$ sono in numero di

$$\frac{(2^n - 1)(2^{n-1} - 1)(2^n + 1)}{3} = \frac{(2^{2n} - 1)(2^{n-1} - 1)}{3} \quad (1).$$

Allora, se n è dispari, da [11], § 249, si trae che tali sottogruppi di ordine 4 si ripartiscono in classi di sottogruppi coniugati, ciascuna classe contenendo $2^{2n} - 1$ sottogruppi; si avranno quindi $\frac{2^{n-1} - 1}{3}$ classi di sottogruppi coniugati, isomorfi a gruppi di Klein; questo numero è uguale ad 1 se e soltanto se $n = 3$, mentre nelle ipotesi presenti è $n > 3$: dunque i sottogruppi di ordine 4 non sono tutti coniugati in $\text{PSL}(2, 2^n)$, per n dispari > 3 .

Vediamo ora che cosa avviene per n pari; in tal caso si ottengono o tante classi quante nel caso precedente, ovvero $2^{n-1} - 1$ classi: in entrambi i casi non si ottiene una sola classe di sottogruppi coniugati di ordine 4. Possiamo quindi concludere con la seguente:

PROPOSIZIONE 1.3. $\text{PSL}(2, 2^n)$, $n > 3$, non è un C-gruppo.

§ 2. C-GRUPPI SEMPLICI DEL TIPO $\text{PSL}(2, q)$, CON $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$, $q > 3$.

Utilizziamo ancora il teorema di Dickson ([10], 11.8.27), ([11], § 260) per determinare le classi di sottogruppi coniugati dei gruppi $\text{PSL}(2, q)$, con $q = p^n \equiv 3, 5 \pmod{8}$. Precisamente tali gruppi contengono:

(1) $q + 1$ p -sottogruppi di Sylow, abeliani elementari di ordine $p^n = q$, coniugati, ad intersezione a due a due identica;

(2) sottogruppi abeliani elementari di ordine p^m , $1 \leq m < n$, contenuti nei precedenti. Tra questi, quelli di ordine p si raggruppano in classi di sottogruppi coniugati contenenti ciascuna

$$\begin{aligned} \frac{(p^{2n} - 1)}{2(p - 1)} & \quad \text{sottogruppi, se } n \text{ è pari,} \\ \frac{(p^{2n} - 1)}{p - 1} & \quad \text{sottogruppi, se } n \text{ è dispari.} \end{aligned}$$

Poiché complessivamente vi sono $\frac{(p^{2n} - 1)}{p - 1}$ sottogruppi di ordine p in $\text{PSL}(2, q)$, qualunque sia n , allora, se n è pari vi sono 2 classi di sottogruppi di ordine p coniugati in $\text{PSL}(2, q)$, mentre se n è dispari essi risultano tutti fra loro coniugati. Ragionando in modo analogo, si ottiene che, se n è dispari,

(1) In un gruppo abeliano elementare di ordine p^n il numero N_k dei sottogruppi di ordine p^k , con $1 \leq k < n$, è dato notoriamente da:

$$N_k = \frac{(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{k-1})}{(p^k - 1)(p^k - p) \cdots (p^k - p^{k-1})}.$$

$\text{PSL}(2, q)$ contiene $\frac{p^{n-1}-1}{p^2-1}$ classi di coniugio di sottogruppi di ordine p^2 , numero che è uguale ad 1 se e soltanto se $n = 3$. Otteniamo così una prima restrizione:

PROPOSIZIONE 2.1. Se $\text{PSL}(2, q)$, $3 < q = p^n \equiv 3, 5 \pmod{8}$ è un C-gruppo, allora $n = 1$ oppure $n = 3$.

Proseguendo, nel gruppo dianzi considerato vi sono ancora i seguenti sottogruppi:

(3) $\frac{1}{2} q(q+1)$ sottogruppi ciclici coniugati di ordini $\frac{q-1}{2}$;

(4) $\frac{1}{2} q(q-1)$ sottogruppi ciclici coniugati di ordini $\frac{q+1}{2}$;

(5) $\frac{1}{2} q(q+1)$ sottogruppi ciclici coniugati per ogni divisore di $\frac{q-1}{2}$;

(6) $\frac{1}{2} q(q-1)$ sottogruppi ciclici coniugati per ogni divisore di $\frac{q+1}{2}$;

(7) $\frac{q(q^2-1)}{4d}$ sottogruppi diedrali coniugati $D_{2,d}$ per ogni divisore dispari d di $\frac{q-1}{2}$ e $\frac{q+1}{2}$; non vi sono divisori pari maggiori di 2 di questi numeri, essendo $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$; quindi non vi sono altri gruppi diedrali nel gruppo considerato;

(8) $q^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$, essendo $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$, pertanto non vi sono gruppi simmetrici S_4 tra i sottogruppi ([10], 11.8.18);

(9) essendo $p > 3$ e $p^{2n} - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$, vi è una classe coniugata di sottogruppi isomorfi ad A_4 , ([10], 11.8.18), gruppo alterno su 4 elementi;

(10) se $q = 5 = p$, $\text{PSL}(2, 5) \cong A_5$ ([10], 11.6.14) e otteniamo un C-gruppo; se $q = 5^3$, oppure $p^{2n} - 1 = q^2 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$, ($n = 1, 3$), vi sono in $\text{PSL}(2, q)$ due classi di sottogruppi coniugati isomorfi ad A_5 ([10], 11.8.13), ([11], § 259); si noti che entrambi i casi sono compatibili con la congruenza $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$.

Si deduce pertanto la seguente ulteriore limitazione:

PROPOSIZIONE 2.2. Se $\text{PSL}(2, q)$, $3 < q \equiv 3, 5 \pmod{8}$ è un C-gruppo, allora $q = 5$ oppure $q \not\equiv 5^3$ e $q^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{5}$.

Restano i seguenti sottogruppi:

(11) sottogruppi isomorfi a $\text{PSL}(2, p)$, coniugati;

(12) sottogruppi che sono prodotti semidiretti di p -gruppi abeliani elementari di ordini p^m , $1 \leq m \leq n$, con gruppi ciclici di ordini t , ove $t/p^m - 1$ e $t/p^n - 1$; allora, se $q = p$ (cioè $n = 1$), tali sottogruppi sono i prodotti semidiretti di un p -sottogruppo di Sylow ciclico di ordine p con un sottogruppo ciclico di ordine $\frac{p-1}{2}$, coniugati, perché normalizzanti dei p -sottogruppi di Sylow; invece, se $q = p^3$ (cioè $n = 3$), soltanto i prodotti semidiretti di p -sottogruppi di Sylow abeliani elementari di ordine p^3 con gruppi ciclici

di ordini $\frac{p^3-1}{2}$ sono coniugati, perché normalizzanti dei p -sottogruppi di Sylow; gli altri non si raggruppano in un'unica classe di coniugio, come segue da [11], § 250.

Non vi sono altri sottogruppi in $\text{PSL}(2, q)$, con $3 < q \equiv 3, 5 \pmod{8}$. Abbiamo così ottenuto che:

TEOREMA 2.3. I C -gruppi semplici sono i seguenti:

- (i) $\text{PSL}(2, 4) \cong \text{PSL}(2, 5) \cong A_5$,
- (ii) $\text{PSL}(2, 8)$;
- (iii) $\text{PSL}(2, p)$, p primo, $p > 5$, $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{5}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. MACHÍ, *On a class of finite groups*, « Rend. Sc. Fis. Mat. e Nat., Acc. dei Lincei », 48, 147-151 (1970).
- [2] C. DE VIVO, *Sui C-gruppi risolubili*, « Ric. Mat. », 75-85 (1972).
- [3] E. STRICKLAND, *Alcune proprietà dei C-gruppi*, « Rend. di Mat. » (in corso di pubblicazione).
- [4] R. ARMSTRONG, *Finite groups in which any two subgroups of the same order are isomorphic*, « Proc. Cambr. Phil. Soc. », 54, 18-27 (1958).
- [5] D. GORENSTEIN, *Finite Groups*, Harper-Row, 1968.
- [6] R. BRAUER e M. SUZUKI, *On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a generalized quaternion group*, « Proc. Nat. Ac. Sc. », 45, 1757-1759 (1959).
- [7] J. H. WALTER, *The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups*, « Ann. of Math. », 89 (2), 405-514 (1969).
- [8] Z. JANKO, *A new finite simple group with abelian Sylow 2-subgroups and its characterization*, « Journal of Algebra », 5, 147-186 (1966).
- [9] H. N. WARD, *On Ree's series of simple groups*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 121, 62-89 (1966).
- [10] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen*, I, Springer, Berlin, 1967.
- [11] L. E. DICKSON, *Linear Groups*, B. G. Teubner, Leipzig, 1901.