
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ALBERTO DEL FRA, GIULIANO ROMANI

Conessioni e curvature nel fibrato $ISO(E,F)$. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.5, p. 718–723.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_5_718_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria differenziale. — *Connessioni e curvature nel fibrato* ISO (E, F) ^(*). Nota II di ALBERTO DEL FRA e GIULIANO ROMANI, presentata ^(**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — N. Teleman's generalized connections in the fiber bundle ISO (E, F) are studied. Some relations between these connections and infinitesimal connections in the principal bundles associated with the vector bundles E, F, are obtained. Geometric interpretation of the curvature of a generalized connection is given.

5. STUDIO GEOMETRICO DELLE CONNESSIONI GENERALIZZATE

5.1. Il presente paragrafo è dedicato alla interpretazione geometrica delle connessioni generalizzate $\nabla_d, \nabla_s, \nabla$.

Poiché ∇_d equivale ad una connessione infinitesimale in $\tilde{E}_d = \text{ISO}(\mathbf{1}_n, E)$ ⁽⁵⁾ il suo significato geometrico è ben conosciuto. $\tilde{E}_{d,x}$ può invero identificarsi con l'insieme delle basi di E_x pensando coincidente $\alpha_x \in \text{ISO}(\mathbf{K}^n, E_x)$ con $a_x = \alpha_x(e)$, base di E_x (e base canonica di $\mathbf{K}^n$). Com'è noto la connessione infinitesimale ∇_d induce un trasporto per parallelismo nel fibrato principale, cioè nel fibrato delle basi delle fibre di E.

Per una carta (U, φ) , porremo come in 2.2.1

$$\nabla_d X(x, g) = (X(x), \Gamma(X(x), x)g).$$

Avendo fissato la carta, resta determinato un isomorfismo $E_x \cong \mathbf{K}^n$ che penseremo come identificazione. Alla base canonica e di $\mathbf{K}^n$ corrisponde allora una base di E_x che diremo « e pensata in E_x ». Si ha allora che:

$\Gamma(X(x), x)$ fornisce la «parte principale» della variazione che la base e pensata in E_x subisce quando viene trasportata per parallelismo secondo la connessione ∇_d nella «direzione» $X(x)$.

5.2. Anche $\tilde{E}_{s,x} = \text{ISO}(E_x, \mathbf{1}_n)$ può identificarsi con l'insieme delle basi di E_x associando a $\beta_x \in \text{ISO}(E_x, \mathbf{K}^n)$ quella base b_x di E_x per cui risulta $\beta_x(b_x) = e$.

Si ha così che $\tilde{E}_d$ e $\tilde{E}_s$ si corrispondono canonicamente secondo il diffeomorfismo

$$\Phi: \tilde{E}_d \rightarrow \tilde{E}_s$$

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni. (La ricerca è stata svolta in collaborazione dai due Autori; G. Romani ha trattato particolarmente gli argomenti dei §§ 2, 3, 5 e A. Del Fra quelli dei §§ 4, 6).

(**) Nella seduta del 14 aprile 1973.

(5) Usiamo qui E, anziché F come al n. 1.2.

che ad α_x , rappresentativo della base $\mathbf{a}_x = \alpha_x(\mathbf{e})$, associa $\beta_x = \Phi(\alpha_x) = \alpha_x^{-1}$, rappresentativo della stessa base $\mathbf{b}_x = \mathbf{a}_x$.

Localmente posto $\alpha_x = (x, a) \in U \times GL(n, \mathbf{K})$ risulta

$$\Phi(x, a) = (x, a^{-1}).$$

Conseguentemente per il differenziale $\Phi_*: T(\tilde{E}_d) \rightarrow T(\tilde{E}_s)$ di Φ , si ha per un vettore (X, A) tangente in un punto della sezione unitaria σ di $\tilde{E}_d$:

$$5.2.1 \quad \Phi_*(X, A) = (X, -A)$$

e per uno (X, Ag) tangente in (x, g) :

$$5.2.2 \quad \Phi_*(X, Ag) = (X, -g^{-1}A).$$

Tali formule mostrano come Φ_* trasformi un campo invariante a destra di $\tilde{E}_d$ in uno invariante a sinistra di $\tilde{E}_s$, determinando così una corrispondenza

$$\Psi: \mathfrak{X}_d(\tilde{E}_d) \rightarrow \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s).$$

Si può facilmente verificare che

5.2.3. PROPOSIZIONE. — $\Psi: \mathfrak{X}_d(\tilde{E}_d) \rightarrow \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s)$ è un $\mathfrak{F}(M)$ -isomorfismo di algebre di Lie.

5.3. La corrispondenza $\Psi: \mathfrak{X}_d(\tilde{E}_d) \rightarrow \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s)$ permette di passare da una connessione $\nabla_d: \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{X}_d(\tilde{E}_d)$ alla connessione $\nabla_s: \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s)$ definita dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_d(\tilde{E}_d) & \xrightarrow{\Psi} & \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s) \\ \nabla_d \swarrow & & \searrow \nabla_s \\ & \Gamma(T) & \end{array}$$

cioè $\nabla_s = \Psi \nabla_d$. La formula 5.3.1 esprime il legame cercato tra le connessioni ∇_d e ∇_s . Essendo Ψ biunivoco, esso garantisce inoltre che ogni ∇_s proviene da una $\nabla_d = \Psi^{-1} \nabla_s$.

5.4. Per meglio comprendere il legame tra le due connessioni limitiamo le nostre considerazioni ad una carta (U, φ) di M . Sia X un campo tangente ad M . Tenendo conto della 2.2.1 e della 5.2.2 si ha:

$$5.4.1 \quad \Psi \nabla_d(x, g) = (X(x), -g^{-1} \Gamma(X(x), x)) \quad (x, g) \in U \times GL(n, \mathbf{K}).$$

Essendo anche qui (come al n. 5.2) fissato l'isomorfismo $E_x \cong \mathbf{K}^n$, la base corrispondente alla base canonica $\mathbf{e}$ di $\mathbf{K}^n$ la diremo ancora « $\mathbf{e}$ pensata in E_x ».

Dalla 5.4.1 si trae che, fissata una connessione ∇_s in $\tilde{E}_s$ e posto, come in 2.3.1, $\nabla_s X(x, g) = (X(x), g \Lambda(X(x), x))$:

5.4.2. PROPOSIZIONE. - $\Lambda(X(x), x)$ è l'opposto della parte principale della variazione che subisce la base canonica e , pensata in E_x , allorché viene trasportata per parallelismo secondo $\nabla_d = \Psi^{-1} \nabla_s$ nella « direzione » $X(x)$. (Data la linearità di Λ si può anche osservare che $\Lambda(X(x), x)$ eguaglia la parte principale della variazione subita da e quando viene trasportata per parallelismo secondo ∇_d nella direzione $-X(x)$).

5.5. Passiamo infine al caso di una connessione $\nabla = \nabla_s \# \nabla_d$ in $ISO(E, F)$. Consideriamo di nuovo le restrizioni dei fibrati E, F , $ISO(E, F)$ ad un aperto $U \in \mathbb{I}$, dove si fanno le solite identificazioni. Ricordando la 3.2.2

$$\nabla X(x, g) = (X(x), \Gamma(X(x), x)g + g\Lambda(X(x), x))$$

per la 4.1.5 e la 5.4.2 si può affermare:

5.5.1. TEOREMA. - $\Gamma(X(x), x) + \Lambda(X(x), x)$ è la differenza tra la variazione infinitesimale subita dalla base canonica e di $\mathbf{K}^n$ (pensata in F_x), trasportata per parallelismo secondo ∇_d nella direzione $X(x)$, e la variazione infinitesimale subita da e (pensata in E_x), allorché viene trasportata secondo $\Psi^{-1} \nabla_s$ nella direzione $X(x)$.

Per precisare ulteriormente il significato geometrico di ∇ , consideriamo un arco di curva regolare in U $\gamma: [-1, 1] \rightarrow M$ passante per $x = \gamma(0)$ e sia $X(\gamma(t))$, $t \in [-1, 1]$, il campo di vettori tangenti su γ : $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$. Il campo X definito su γ si può estendere su U e continueremo a denotarlo ancora con X .

Generalizzando la terminologia usata nel caso delle connessioni infinitesimali, diremo che un cammino $\bar{\gamma}: [-1, 1] \rightarrow U \times GL(n, \mathbf{K})$ è un sollevamento di γ se il vettore tangente $\dot{\bar{\gamma}}(t) = \nabla X(\gamma(t))$.

Denotati con $\bar{\gamma}_d^g(t)$, $\bar{\gamma}_s^g(t)$, $\bar{\gamma}^g(t)$ i sollevamenti di γ passanti per (x, g) relativi rispettivamente alle connessioni $\nabla_d, \nabla_s, \nabla = \nabla_s \# \nabla_d$, si ha:

5.5.2. PROPOSIZIONE. - I sollevamenti $\bar{\gamma}_d^g, \bar{\gamma}_s^g$ sono del tipo

$$i) \quad \bar{\gamma}_d^g(t) = (\gamma(t), a(t)g) \quad \text{con} \quad \dot{a}(t) = \Gamma(\dot{\gamma}(t), \gamma(t))a(t), \quad a(0) = e.$$

$$ii) \quad \bar{\gamma}_s^g(t) = (\gamma(t), gb(t)) \quad \text{con} \quad \dot{b}(t) = b(t)\Lambda(\dot{\gamma}(t), \gamma(t)), \quad b(0) = e.$$

e di conseguenza:

$$iii) \quad \bar{\gamma}^g(t) = (\gamma(t), a(t)gb(t)).$$

Invero il problema si riduce ad un esame di sistemi differenziali ordinari lineari del I ordine. Il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di tali sistemi assicura la possibilità di costruire le funzioni $a, b: [-1, 1] \rightarrow GL(n, \mathbf{K})$. Un calcolo diretto mostra poi che $\bar{\gamma}_d^g, \bar{\gamma}_s^g, \bar{\gamma}^g$ definiti in $i), ii), iii)$ sono le soluzioni dei relativi sistemi differenziali per ogni condizione iniziale $g \in GL(n, \mathbf{K})$.

Com'è noto la matrice $a(t)g$ rappresenta la base $a(t)g = ea(t)g$ di $F_{\gamma(t)}$ ottenuta trasportando per parallelismo secondo ∇_d la base $g = eg$ di $F_{\gamma(0)}$. Inoltre dalla *ii*) segue

$$5.5.3 \quad \dot{b}^{-1}(t) = -\Lambda(\dot{\gamma}(t), \gamma(t)) b^{-1}(t).$$

Si può quindi dire che la base rappresentata da $gb(t)$, cioè $b^{-1}(t)g^{-1} = eb^{-1}(t)g^{-1}$ è la trasportata per parallelismo secondo $\Psi^{-1}\nabla_s$ di $g^{-1} = eg^{-1}$ pensata come base di $E_{\gamma(0)}$.

Per quanto riguarda l'interpretazione geometrica della *iii*), si consideri l'isomorfismo $\eta_{\gamma(t)}^g: E_{\gamma(t)} \rightarrow F_{\gamma(t)}$ definito da

$$5.5.4 \quad \eta_{\gamma(t)}^g(e) = ea(t)gb(t)$$

chiameremo $\eta_{\gamma(t)}^g$ « il trasportato per parallelismo » dell'isomorfismo $\eta_{\gamma(0)}^g: E_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(0)}$ definito da $\eta_{\gamma(0)}^g(e) = eg = g$.

Si può allora concludere:

5.5.5 TEOREMA. — *L'isomorfismo $\eta_{\gamma(t)}^g: E_{\gamma(t)} \rightarrow F_{\gamma(t)}$, trasportato per parallelismo di $\eta_{\gamma(0)}^g$, è quello che trasforma la base $b^{-1}(t)$ di $E_{\gamma(t)}$ (trasportata secondo $\Psi^{-1}\nabla_s$ di e) nella base $a(t)g$ di $F_{\gamma(t)}$ (trasportata secondo ∇_d di $g = \eta_{\gamma(0)}^g(e)$).*

6. CURVATURE GENERALIZZATE E LORO SIGNIFICATO GEOMETRICO

6.1. Seguendo le definizioni date in [4] la curvatura Ω_{∇} associata ad una connessione generalizzata ∇ è

$$\Omega_{\nabla}(X_1, X_2) = [\nabla X_1, \nabla X_2] - \nabla[X_1, X_2] \quad X_1, X_2 \in \Gamma(T).$$

È noto ([1]) che una connessione infinitesimale ∇_d in $\tilde{E}_d$ induce una connessione lineare in E . Si può verificare che la curvatura della connessione lineare coincide con la curvatura Ω_{∇_d} .

Studieremo le curvature Ω_{∇_d} , Ω_{∇_s} , Ω_{∇} associate risp. alle connessioni ∇_d , ∇_s , ∇ e i loro legami.

Sia $\nabla_d: \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{X}_d(\tilde{E}_d)$ una connessione infinitesimale in $\tilde{E}_d$ e $\nabla_s = \Psi\nabla_d: \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s)$ quella associata in $\tilde{E}_s$. Ricordando che Ψ è un isomorfismo di algebre di Lie (cfr. 5.2.3) si ha la seguente

6.1.1. PROPOSIZIONE. — $\Omega_{\Psi\nabla_d}(X_1, X_2) = \Psi\Omega_{\nabla_d}(X_1, X_2)$, $X_1, X_2 \in \Gamma(T)$.

Inoltre tenendo presente che $\pi_i: \mathfrak{X}_i(\tilde{E}_i) \rightarrow \Gamma(T)$ ($i = d, s$) è un morfismo di algebre di Lie di cui ∇_i è inverso destro (cfr. nn. 2.1, 2.3), si ha:

6.1.2 PROPOSIZIONE. — $\Omega_{\nabla_i}(X_1, X_2) \in \text{Ker } \pi_i$ ($i = d, s$).

Consideriamo adesso la curvatura Ω_{∇} associata ad una connessione ∇ in ISO (E, F) . Posto $\nabla = \nabla_s \# \nabla_d$ risulta:

6.1.3. PROPOSIZIONE. - $\Omega_{\nabla}(X_1, X_2) = \chi(\Omega_{\nabla_s}(X_1, X_2) \oplus_M \Omega_{\nabla_d}(X_1, X_2))$.

La dimostrazione discende dal calcolo locale di Ω_{∇} . Infatti usando i simboli dei nn. 2.2, 2.3, 3.2 e tenendo conto della 6.1.2, si ha

$$\begin{aligned}\Omega_{\nabla_d}(X_1, X_2) &= [(X_1, \Gamma X_1), (X_2, \Gamma X_2)] - ([X_1, X_2], \Gamma[X_1, X_2]) = \\ &= (\circ, X_1 \Gamma X_2 - X_2 \Gamma X_1 + [\Gamma X_1, \Gamma X_2] - \Gamma[X_1, X_2]) \\ \Omega_{\nabla_s}(X_1, X_2) &= [(X_1, \Lambda X_1), (X_2, \Lambda X_2)] - ([X_1, X_2], \Lambda[X_1, X_2]) = \\ &= (\circ, X_1 \Lambda X_2 - X_2 \Lambda X_1 + [\Lambda X_1, \Lambda X_2] - \Lambda[X_1, X_2]) \\ \Omega_{\nabla}(X_1, X_2) &= [(X_1, \Gamma X_1 + \Lambda X_1), (X_2, \Gamma X_2 + \Lambda X_2)] - \\ &- ([X_1, X_2], \Gamma[X_1, X_2] + \Lambda[X_1, X_2]) = \\ &= (\circ, X_1(\Gamma X_2 + \Lambda X_2) - X_2(\Gamma X_1 + \Lambda X_1) + \\ &+ [\Gamma X_1 + \Lambda X_1, \Gamma X_2 + \Lambda X_2] - \Gamma[X_1, X_2] - \Lambda[X_1, X_2]).\end{aligned}$$

Ricordando che la parentesi di Poisson di un campo invariante a destra e di uno invariante a sinistra è nulla, risulta:

$$[\Gamma X_1 + \Lambda X_1, \Gamma X_2 + \Lambda X_2] = [\Gamma X_1, \Lambda X_1] + [\Gamma X_2, \Lambda X_2]$$

da cui

$$\begin{aligned}\Omega_{\nabla}(X_1, X_2) &= (\circ, X_1 \Gamma X_2 - X_2 \Gamma X_1 + [\Gamma X_1, \Gamma X_2] - \Gamma[X_1, X_2]) + \\ &+ (\circ, X_1 \Lambda X_2 - X_2 \Lambda X_1 + [\Lambda X_1, \Lambda X_2] - \Lambda[X_1, X_2]) = \\ &= \chi(\Omega_{\nabla_s}(X_1, X_2) \oplus_M \Omega_{\nabla_d}(X_1, X_2)).\end{aligned}$$

Per la 6.1.1 si ha anche la formula

$$6.1.4 \quad \Omega_{\nabla}(X_1, X_2) = \chi(\Psi \Omega_{\Psi^{-1}\nabla_s}(X_1, X_2) \oplus_M \Omega_{\nabla_d}(X_1, X_2)).$$

6.2. Sia $x_0 \in U$ e X_1, X_2 due vettori indipendenti di $T_{x_0}M$. Non è restrittivo supporre $x_0 \equiv (0, 0, \dots, 0)$, $X_1 \equiv (1, 0, \dots, 0)$, $X_2 \equiv (0, 1, \dots, 0)$ nella carta fissata. Con X_1, X_2 indicheremo anche i campi costanti in U determinati dai due vettori.

Consideriamo il quadrato di vertici $x_0 = (0, 0, \dots, 0)$, $x_1 = (\tau, 0, \dots, 0)$, $x_2 = (0, \tau, \dots, 0)$, $x_3 = (\tau, \tau, \dots, 0)$. Indicato con $\gamma_{ij}(t)$ il segmento di estremi x_i, x_j , sia $\bar{\gamma}_{ij}^g(t) = (\gamma_{ij}(t), a_{ij}(t)gb_{ij}(t))$, per ogni $g \in GL(n, \mathbf{K})$ il suo sollevamento passante per (x_i, g) .

Partendo da (x_0, e) e componendo successivamente i sollevamenti lungo γ_{01} e γ_{13} per la 5.5.2 iii) otterremo $(\bar{\gamma}_{13} \circ \bar{\gamma}_{01})(\tau) = (x_3, a_{13}(\tau)a_{01}(\tau)b_{01}(\tau)b_{13}(\tau))$. Componendo inoltre quelli lungo γ_{02} e γ_{23} otterremo $(\bar{\gamma}_{23} \circ \bar{\gamma}_{02})(\tau) = (x_3, a_{23}(\tau)a_{02}(\tau)b_{02}(\tau)b_{23}(\tau))$.

Posto $\rho(\tau) = a_{13}(\tau) a_{01}(\tau) b_{01}(\tau) b_{13}(\tau) - a_{23}(\tau) a_{02}(\tau) b_{02}(\tau) b_{23}(\tau)$, dimostreremo il seguente

$$6.2.1. \text{ TEOREMA. } - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\rho(\tau)}{\tau^2} = \Omega_V(X_1, X_2)(x_0, e).$$

Tale risultato è noto nel caso classico. Limitandoci alla curvatura possiamo quindi scrivere per la 5.5.2 i)

$$\Omega_{\nabla_d}(X_1, X_2)(x_0, e) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{a_{13}(\tau) a_{01}(\tau) - a_{23}(\tau) a_{02}(\tau)}{\tau^2}.$$

Per quanto riguarda la curvatura Ω_{∇_s} , poiché risulta $\nabla_s = \Psi \bar{\nabla}_d$ con $\bar{\nabla}_d$ espressa dalle equazioni 5.5.3, si ottiene per la 6.1.1 e la 5.2.1

$$\begin{aligned} \Omega_{\nabla_s}(X_1, X_2)(x_0, e) &= (\Psi \Omega_{\bar{\nabla}_d}(X_1, X_2)(x_0, e)) = \Phi_*(\Omega_{\bar{\nabla}_d}(X_1, X_2)(x_0, e)) = \\ &= -\Omega_{\bar{\nabla}_d}(X_1, X_2)(x_0, e) = -\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{b_{13}^{-1}(\tau) b_{01}^{-1}(\tau) - b_{23}^{-1}(\tau) b_{02}^{-1}(\tau)}{\tau^2} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(b_{01}(\tau) b_{13}(\tau))^{-1} - (b_{02}(\tau) b_{23}(\tau))^{-1}}{\tau^2} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{b_{01}(\tau) b_{13}(\tau) - b_{02}(\tau) b_{23}(\tau)}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Possiamo adesso dimostrare il Teorema. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\rho(\tau)}{\tau^2} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{a_{13}(\tau) a_{01}(\tau) b_{01}(\tau) b_{13}(\tau) - a_{23}(\tau) a_{02}(\tau) b_{02}(\tau) b_{23}(\tau)}{\tau^2} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{a_{13}(\tau) a_{01}(\tau) b_{01}(\tau) b_{13}(\tau) - a_{23}(\tau) a_{02}(\tau) b_{01}(\tau) b_{13}(\tau) + \\ &\quad + a_{23}(\tau) a_{02}(\tau) b_{01}(\tau) b_{13}(\tau) - a_{23}(\tau) a_{02}(\tau) b_{02}(\tau) b_{23}(\tau)}{\tau^2} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(a_{13}(\tau) a_{01}(\tau) - a_{23}(\tau) a_{02}(\tau)) b_{01}(\tau) b_{13}(\tau)}{\tau^2} + \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{a_{23}(\tau) a_{02}(\tau) (b_{01}(\tau) b_{13}(\tau) - b_{02}(\tau) b_{23}(\tau))}{\tau^2} = \\ &= \chi(\Omega_{\nabla_s}(X_1, X_2) \oplus_M \Omega_{\nabla_d}(X_1, X_2))(x_0, e) = \Omega_V(X_1, X_2)(x_0, e). \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. KOBAYASHI e K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Vol. I, Interscience Publishers (1969).
- [2] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ediz. Cremonese, Roma 1962.
- [3] S. MACLANE, *Homology*, Springer Verlag (1963).
- [4] N. TELEMAN, *A characteristic ring of a Lie algebra extension*, Note I e II, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (8) 52, 498-506 e 708-711 (1972).