Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur un lemme de convergence et ses applications aux équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires et non monotones. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.5, p. 690–693.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_5_690_0>

Analisi matematica. — *Sur un lemme de convergence et ses applications aux équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires et non monotones.* Nota III di MARCO BIROLI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dimostra il Teorema 5 enunciato nella Nota I.

§ 5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5

Démontrons d'abord un lemme:

LEMME 4. *Soient* $\{u_{0,n}\}$ *une suite dans* $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ *et* $\{f_n(t)\}$ *une suite dans* $\mathfrak{L}^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Supposons que

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} u_{0,n} = u_0 \qquad \textit{dans} \quad \mathfrak{L}^2(\Omega)$$
$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} f_n(t) = f(t) \qquad \textit{dans} \quad \mathfrak{L}^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Considérons le problème

$$u'(t) + Au(t) + \sigma(t) = f_n(t) \quad \textit{p.p. sur } [0, T] \quad \textit{dans} \quad \mathfrak{L}^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$$
$$u(0) = u_{0,n}$$
$$\sigma(t) \in \mathfrak{L}^1(0, T; \mathfrak{L}^1(\Omega)) \quad \sigma(t, x) \in \beta(u(t, x))$$
$$\textit{p.p.} \quad \textit{sur} \ [0, T] \times \Omega$$

Le problème a une solution $u_n(t)$ *et on peut extraire de* $\{u_n(t)\}$, *une soussuite, que nous indiquons encore par* $\{u_n(t)\}$, *telle que*

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n(t) = u(t) \qquad \textit{dans} \quad \mathfrak{L}^2(0, T; H_0^{-1}(\Omega))$$
$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n(t) = u(t)$$

uniformément sur $[0, T]$ *dans* $\mathfrak{L}^2(\Omega)$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$$

dans $\mathfrak{L}^2(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$ *où* $u(t)$ *est solution du problème.*

$$u'(t) + Au(t) + \sigma(t) = f(t) \qquad \textit{p.p.} \quad \textit{sur} \ [0, T]$$
$$\textit{dans} \quad H^{-1}(\Omega) + \mathfrak{L}^1(\Omega)$$
$$u(0) = u_0$$
$$\sigma(t) \in \mathfrak{L}^1(0, T; \mathfrak{L}^1(\Omega)) \quad \sigma(t, x) \in \beta(u(t, x))$$
$$\textit{p.p.} \quad \textit{sur} \ [0, T] \times \Omega.$$

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Parma. Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1973.

Par le même procedé du § 4 on a

$$(5,1) \qquad \| u_n(t) \|_{\mathcal{L}^2} \leq C_1$$

$$(5,2) \qquad \int_0^T \| u_n(t) \|^2_{H^1_0} \mathrm{d}t \leq C_2$$

$$(5,3) \qquad \int_0^T \int_\Omega g_n(u_n(t\,,x))\, u_n(t\,,x)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \leq C_4$$

où C_1, C_2 et C_4 ne dépendent pas de n.

De (5,3) et du Lemme 2, § 1 on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(5,4) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} g_n(u_n(t)) = \sigma(t)$$

dans $\mathcal{L}^1(0\,,T\,;\mathcal{L}^1(\Omega))$.

De (5,1), (5,2) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(5,5) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{**} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathcal{L}^\infty(0\,,T\,;\mathcal{L}^2(\Omega))$$

$$(5,6) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2(0\,,T\,;H^1_0(\Omega))\,.$$

De (5,4), (5,6) on a

$$(5,7) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} u'_n(t) = u'(t)$$

dans $\mathcal{L}^1(0\,,T\,;\mathcal{L}^1(\Omega)) + \mathcal{L}^2(0\,,T\,;H^{-1}(\Omega))$.

De (5,5), (5,6), (5,7) on a

$$(5,8) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n(t) = u(t)$$

uniformément sur $[0\,,T]$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

De (5,6) (5,7) et du Lemme 3, § 4, on a

$$(5,9) \qquad \lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2(0\,,T\,;\mathcal{L}^2(\Omega))\,.$$

De (5,4), (5,9) et du Lemme 2, § 1 on a

$$(5,10) \qquad \sigma(t\,,x) \in \beta(u(t\,,x))$$

p.p. sur $[0\,,T]\times\Omega$.

De (5,6), (5,7), (5,9), (5,10) on a

$$u'(t) + Au(t) + \sigma(t) = f(t) \qquad \text{p.p. sur } [0\,,T]$$
$$\text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) + \mathcal{L}^1(\Omega)$$
$$u(0) = u_0$$
$$\sigma(t) \in \mathcal{L}^1(0\,,T\,;\mathcal{L}^1(\Omega)) \quad \sigma(t\,,x) \in \beta(u(t\,,x))$$
$$\text{p.p. sur } [0\,,T]\times\Omega.$$

Le lemme est ainsi démontré.

Supposons d'abord $f(t) \in \mathfrak{L}^{\infty}(\mathbf{R}\,;\mathfrak{L}^2(\Omega))$.

Considérons maintenant le problème

$$(\mathrm{III}_n) \qquad \begin{aligned} &u'(t) + \mathrm{A}u(t) + g_n(u(t)) = f(t) \\ &u(0) = u_0 \end{aligned}$$

et indiquons par $u_n(t)$ la solution de ce problème.

En multipliant l'équation par $u_n(t)$ on a

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_n(t)\|^2_{\mathfrak{L}^2} \leq (f(t)\,,u_n(t))_{\mathfrak{L}^2} - \|u_n(t)\|^2_{\mathrm{H}^1_0} - (g_n(u_n(t))\,,u_n(t))_{\mathfrak{L}^2} \leq$$
$$\leq (\|f(t)\|_{\mathrm{H}^{-1}} + \mathrm{C}_5)\,\|u_n(t)\|_{\mathrm{H}^1_0} - \|u_n(t)\|^2_{\mathrm{H}^1_0}$$

où C_5 est une constante qui ne dépende pas de n.

De [3] on a alors

$$\|u_n(t)\|_{\mathfrak{L}^2} \leq \mathrm{Max}\,(\mathrm{C}_3\,,\|u_0\|_{\mathfrak{L}^2})$$

où C_3 est une constante qui ne dépende pas de u_0.

Considérons maintenant la transformation $\mathrm{S}: u_0 \to u_n(\mathrm{T})$.

Il est facil démontrer que le problème (III_n) a une unique solution, donc S est univoque.

Indiquons $\mathbf{K} = \mathrm{B}(0\,,\mathrm{C}_3)$; alors $\mathrm{S}: \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ et pour le Lemme 4 est continue dans la topologie faible de $\mathfrak{L}^2(\Omega)$.

On peut donc affirmer, [7], que S a, au moins, un point fixe.

Le problème

$$\begin{aligned} &u'(t) + \mathrm{A}u(t) + g_n(u(t)) = f(t) \\ &u(0) = u(\mathrm{T}) \end{aligned}$$

a donc au moins une solution $u_n(t)$.

On a

$$(5,11) \qquad \|u_n(t)\|_{\mathfrak{L}^2} \leq \mathrm{C}_3$$

donc

$$(5,12) \qquad \int_0^{\mathrm{T}} \|u_n(t)\|^2_{\mathrm{H}^1_0}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{C}_5$$

$$(5,13) \qquad \int_0^{\mathrm{T}}\int_{\Omega} (g_n(u_n(t))\,,u_n(t))_{\mathfrak{L}^2}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{C}_6$$

où $\mathrm{C}_5\,,\mathrm{C}_6$ ne dépendent pas de n.

De (5,13) et du Lemme 2, § 1 on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(5,14) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*}\, g_n(u_n(t\,,x)) = \sigma(t\,,x)$$

dans $\mathfrak{L}^1(0\,,\mathrm{T}\,;\mathfrak{L}^1(\Omega))$.

De (5,11) et (5,12) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$\lim_{n\to\infty}^{**} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega)) \tag{5,15}$$

$$\lim_{n\to\infty}^{*} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{5,16}$$

De (5,14), (5,16) on a

$$\lim_{n\to\infty}^{*} u_n'(t) = u(t) \tag{5,17}$$

dans $\mathcal{L}^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + \mathcal{L}^1(0, T; \mathcal{L}^1(\Omega))$.

De (5,17) et (5,16) pour le Lemme 3 on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \tag{5,18}$$

dans $\mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$; du Lemme 2 et de (5,14), (5,18) on a

$$\sigma(t, x) \in \beta(u(t, x)) \quad \text{p.p. sur} \quad [0, T] \times \Omega. \tag{5,19}$$

De (5,15), (5,16), (5,17) on a

$$\lim_{n\to\infty}^{*} u_n(t) = u(t) \tag{5,20}$$

uniformément sur $[0, T]$ dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

De (5,14), (5,16), (5,17), (5,19) on a que $u(t)$ est solution du problème

$$\text{(III}'') \qquad \begin{aligned} & u'(t) + Au(t) + \sigma(t) = f(t) \\ & u(0) = u(T) \\ & \sigma(t) \in \mathcal{L}^1(0, T; \mathcal{L}^1(\Omega)) \quad \sigma(t, x) \in \beta(u(t, x)) \quad \text{p.p.} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad [0, T] \times \Omega. \end{aligned}$$

Le théorème est ainsi démontré pour $f(t) \in \mathcal{L}^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$.

Étant $\int_0^T \| u(t) \|_{H_0^1}^2 \, dt \leq C_5$ on peut supposer, sans perdre de généralité, $\| u(0) \|_{\mathcal{L}^2} \leq C_7$.

Du Lemme 4, on a alors que (III″) a une solution pour

$$f(t) \in \mathcal{L}^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMERIO L. et PROUSE G., *Almost periodic functions and functional analysis*, Van Nostrand, Reinhold 1971.

[2] AMERIO L. et PROUSE G., *On the non linear wave equation with dissipative term discontinous with respect to the velocity*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *44* (1968).

[3] BIROLI M., *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution paraboliques*, « Ann. Mat. pura ed Appl., IV », *88*, 51–70 (1971).

[4] HUKUHARA M., *Sur l'existence de points invariants d'une transformation des espaces fonctionnelles*, « Japan J. of Math. », *20*, 1–4 (1950).