
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MAURO PICONE

**Sull'esistenza dell'unica soluzione di una certa
equazione lineare a derivate parziali del primo ordine**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.5, p. 685–689.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_5_685_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sull'esistenza dell'unica soluzione di una certa equazione lineare a derivate parziali del primo ordine.* Nota (*) del Socio MAURO PICONE.

SUMMARY. — In a previous paper I have proved the unicity of the solution of a certain linear partial differential equation of the first order. Here I give sufficient conditions for the existence and calculability of such a solution; moreover, I transform the above equation into a linear integral equation of a new type.

Nella mia Nota dal titolo: *Su un teorema della teoria delle equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine*, presentata nella seduta del 9 dicembre 1972 della Classe di Scienze fisiche di questa Accademia è dimostrato il teorema:

Nello spazio euclideo S_r , a r dimensioni, luogo dei punti x di coordinate $x_1, x_2, \dots, x_r$, siano assegnati i punti x' e x'' di coordinate

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_r \quad ; \quad x''_1, x''_2, \dots, x''_r,$$

essendo

$$x'_k < x''_k \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

e nel dominio rettangolare $T(x', x'')$ luogo dei punti dello spazio $S_{(r)}$ per i quali si ha:

$$x'_k \leq x_k \leq x''_k \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

siano definite le funzioni reali

$$a_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad b(x),$$

verificanti le disequaglianze:

$$(1) \quad \begin{cases} a_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_r) \leq 0 \\ a_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x''_k, x_{k+1}, \dots, x_r) \geq 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

$$(2) \quad b(x_1, x_2, \dots, x_r) > 0.$$

Se per la funzione reale

$$u(x_1, x_2, \dots, x_r),$$

continua nel dominio rettangolare T , dotata delle derivate parziali del prim'ordine, sussiste ivi l'identità

$$(3) \quad \sum_{k=1}^r a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + b(x) u \equiv 0,$$

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1973.

risulterà

$$u(x) \equiv 0, \quad \text{in } T.$$

Questo teorema pone il seguente interessante problema.

Assegnata, nel dominio T , una funzione reale $f(x)$, in quali ipotesi per questa funzione, ed in quelle del teorema enunciato per i coefficienti $a_k(x)$ e $b(x)$, esiste, in T , la soluzione dell'equazione:

$$(4) \quad \sum_{k=1}^r a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + b(x) u = f(x)? \quad (1)$$

Con la Nota presente dò condizioni sufficienti per tale esistenza.

1. *Caso $r = 1$.* Sia x la variabile reale e per le funzioni reali $a(x)$, $b(x)$, continue nell'intervallo (x', x'') , si abbia

$$(5) \quad a(x') \leq 0, \quad a(x'') \geq 0, \quad b(x) > 0.$$

Assegnata la funzione reale $f(x)$, pur essa continua nell'intervallo (x', x'') , l'equazione differenziale

$$(6) \quad a(x) \frac{du}{dx} + b(x) u = f(x),$$

non può avere, in forza del teorema enunciato, più di una soluzione nel detto intervallo. Verificandosi le prime delle (5), la funzione $a(x)$ dovrà annullarsi nell'intervallo (x', x'') , poichè se non è nulla né in x' , né in x'' , essa sarà negativa in x' e positiva in x'' . Ebbene, sussiste il teorema:

I. *Se la funzione $a(x)$ è di classe uno nell'intervallo (x', x'') e vi si annulla in un solo punto x_0 e se la funzione*

$$(7) \quad \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)},$$

designando $a'(x)$ la derivata di $a(x)$, è continua nel detto intervallo, l'equazione (6) vi possiede la soluzione.

Dimostrazione. Esiste una funzione $\theta(x)$, di classe uno nell'intervallo (x', x'') , ivi sempre positiva, per la quale risulta, nel detto intervallo,

$$\theta b = \frac{d}{dx} (\theta a),$$

essa è data dalla

$$\theta(x) = e^{\int \frac{b(\xi) - a'(\xi)}{a(\xi)} d\xi},$$

(1) È da notare anche il teorema seguente ed il problema analogo a quello enunciato che esso pone:

Se nell'arbitrario dominio T di $S_{(r)}$ è sempre $b(x) \neq 0$ e, sulla frontiera di T , è sempre $a_k(x) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, r$), allora l'unica soluzione, in T , dell'equazione (3) è lo zero.

α designando un punto arbitrariamente fissato nell'intervallo (x', x'') . L'equazione (6) equivale alla seguente

$$\frac{d}{dx} (\theta a u) = \theta f,$$

dalla quale si trae, essendo $a(x_0) = 0$ e $a(x) \neq 0$, per $x \neq x_0$,

$$u(x) = \frac{1}{\theta(x) a(x)} \int_{x_0}^x \theta(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Da questa espressione della $u(x)$, si ricava, in virtù delle ipotesi,

$$u(x_0) = \frac{f(x_0)}{b(x_0)},$$

d'accordo con quanto si deduce dalla (6), supposta soddisfatta, per essere $a(x_0) = 0$, $b(x_0) > 0$.

2. Caso $r \geq 1$. Sussiste il teorema seguente.

II. Per i punti estremi x' e x'' , del dominio rettangolare T , considerato per la detta equazione, si abbia

$$x'_k \leq 0, \quad x''_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

e ivi

$$\frac{a_k(x)}{b(x)} = x_k \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{0, p} a_{i_1 i_2 \dots i_r}^{(k)} x_1^{2i_1} x_2^{2i_2} \dots x_r^{2i_r},$$

$$\frac{f(x)}{b(x)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{0, q} f_{i_1 i_2 \dots i_r} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_r^{i_r},$$

essendo p e q numeri naturali, e

$$(8) \quad a_{i_1 i_2 \dots i_r}^{(k)} \geq 0.$$

Allora l'equazione (4) possiede una ed una sola soluzione che è, essa pure, un polinomio nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Dimostrazione. Si tratta di soddisfare la (4) con un polinomio:

$$(9) \quad \sum_{j_1, j_2, \dots, j_r}^{0, n} u_{j_1 j_2 \dots j_r} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_r^{j_r}.$$

Per essere i coefficienti (8) non negativi, introdotto il polinomio (9) nell'equazione (4), si potrà soddisfare alle equazioni che esprimono l'eguaglianza dei coefficienti dei monomi simili nei due membri dell'equazione.

3. *Traduzione in un'equazione integrale della considerata equazione a derivate parziali, nel caso $r = 2$.* Indicherò con x e y rispettivamente le variabili reali x_1 e x_2 e con $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ i rapporti

$$\frac{a_1(x, y)}{b(x, y)}, \quad \frac{a_2(x, y)}{b(x, y)},$$

considererò quindi l'equazione

$$(10) \quad \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + u = f(x, y).$$

Indicando con p, p', q, q' numeri positivi, il dominio rettangolare T nel quale considererò l'equazione (10) sia il luogo dei punti del piano (x, y) per i quali si verificano le limitazioni

$$-p \leq x \leq p', \quad -q \leq y \leq q'$$

e si abbia

$$\alpha(-p, y) \leq 0, \quad \alpha(p', y) \geq 0$$

$$\beta(x, -q) \leq 0, \quad \beta(x, q') \geq 0,$$

In tali ipotesi l'equazione (10) non può avere, come si è visto, più di una soluzione. Supponiamo, inoltre, che si abbia

$$\alpha(0, y) \equiv 0, \quad \text{nell'intervallo } (-q, q')$$

$$\beta(x, 0) \equiv 0, \quad \text{nell'intervallo } (-p, p'),$$

e che per le equazioni

$$\alpha(x, 0) \frac{\partial u}{\partial x} + u(x, 0) = f(x, 0),$$

$$\beta(0, y) \frac{\partial u}{\partial y} + u(0, y) = f(0, y),$$

siano verificate le ipotesi del teorema I. In tale ipotesi riescono note le funzioni

$$u(x, 0), \quad \text{per } -p \leq x \leq p',$$

$$u(0, y), \quad \text{per } -q \leq y \leq q',$$

che indicherò, rispettivamente, con $\varphi(x)$ e $\psi(y)$, indicando con γ il numero $\varphi(0) = \psi(0) = u(0, 0)$.

Si supponga la soluzione $u(x, y)$ della (10) dotata, in T , della derivata parziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

in particolare si sia nella ipotesi del Teorema II. Si avrà allora, indicando con $v(x, y)$ tale derivata, in quel dominio,

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \gamma + \int_0^x \int_0^y v(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

e l'equazione (10) si traduce nell'equazione integrale

$$\alpha(x, y) \int_0^y v(x, \eta) d\eta + \beta(x, y) \int_0^x v(\xi, y) d\xi + \int_0^x \int_0^y v(\xi, \eta) d\xi d\eta = g(x, y),$$

nella quale $g(x, y)$ è una funzione nota e $v(x, y)$ è l'incognita.

Tale equazione – i cui membri sono entrambi identicamente nulli per $x=0$ e per $y=0$ – non sembra, in generale, riducibile ad avere il tipo di quelle classiche.