Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Igino Scotoni, Mario Vascon

Un metodo numerico per la risoluzione del problema di D irichlet

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.4, p. 615–620.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_615_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

SEZIONE II
(Fisica, chimica, geologia, paleontologia e mineralogia)

Fisica. — *Un metodo numerico per la risoluzione del problema di Dirichlet.* Nota di IGINO SCOTONI e MARIO VASCON, presentata (*) dal Socio A. ROSTAGNI.

SUMMARY. — Here we describe a numerical method to find a function which approximates with great precision a harmonic function (and its gradient), when this function is known in a relative small number of points.

It results from several test proofs that this precision is of the order of 10^{-6} or 10^{-10} when the function is given in some tens of points.

1. Le origini di questo lavoro scaturiscono da un problema prettamente sperimentale quale lo studio e la progettazione di lenti elettroniche. Esso non ha pertanto pretese di formalismo matematico rigoroso, ma vuole fornire un metodo numerico assai preciso e suscettibile di molte altre applicazioni. Infatti il problema di determinare una espressione analitica approssimante una funzione armonica nota in N punti P_i è assai generale.

Il metodo qui studiato consiste nel costruire un sistema non omogeneo di N equazioni, ciascuna delle quali si ottiene eguagliando il valore conosciuto che la funzione assume nel punto P_i (termine noto) alla ridotta m–sima dello sviluppo in serie di MacLaurin, reso armonico, della funzione; in tale ridotta i valori delle variabili sono sostituiti dalle coordinate note del punto P_i, mentre i coefficienti dello sviluppo sono considerati come incognite, e devono essere in numero di N. Ne risulta così un sistema lineare di N equazioni in N incognite.

Una volta risolto tale sistema, ed introdotta nella ridotta m–sima della serie, al posto dei coefficienti, la N–pla di valori soluzione del sistema si ottiene l'espressione analitica di una funzione che approssima la funzione armonica in esame, ed è ad essa identicamente eguale nei punti P_i.

Il metodo sopra descritto dunque fa uso, come strumento fondamentale, di serie di MacLaurin rese armoniche. Sono state costruite pertanto tre serie armoniche: una a tre variabili, una invariante per traslazione, una invariante per rotazione. I termini n–simi sono stati scritti in modo da essere facilmente traducibili in linguaggio di calcolatore. Chiameremo termine n–simo della serie di potenze il termine di grado n, e ridotta m–sima la somma dei primi termini della serie fino a quello di m compreso.

(*) Nella seduta del 14 aprile 1973.

2. SERIE ARMONICA IN TRE VARIABILI

La serie di MacLaurin in xyz si può scrivere

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{L}(xyz) = \mathrm{L}_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_n \mathrm{L}_n(xyz) .$$

Il suo termine n-simo ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = n$):

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{L}_n = \frac{1}{n!} \sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!}\, a^{[n]}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\, x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{0}^{n}{}_{\alpha_2} \sum_{0}^{n-\alpha_2}{}_{\alpha_3} \binom{n}{\alpha_2}\binom{n-\alpha_2}{\alpha_3} a^{[n]}_{\alpha_2\alpha_3}\, x^{n-\alpha_2-\alpha_3} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}$$

contiene $\binom{n+2}{2}$ coefficienti $a^{[n]}_{\alpha_2\alpha_3}$. Imponendo alla serie la condizione di armonicità $\nabla^2 \mathrm{L}_n = 0$, si ottengono $\binom{n}{2}$ relazioni:

$$\text{(3)} \qquad a^{[n]}_{\alpha_2\alpha_3} + a^{[n]}_{(\alpha_2+2)\,\alpha_3} + a^{[n]}_{\alpha_2\,(\alpha_3+2)} = 0 .$$

Ne consegue che $\binom{n+2}{2} - \binom{n}{2} = 2n + 1$ è il numero dei parametri indipendenti. La scelta di questi è arbitraria, perché scelte diverse danno luogo a soluzioni linearmente dipendenti. Unico vincolo in tale scelta è la presenza implicita nella (3) di quattro sistemi indipendenti, che si mettono in evidenza con le due condizioni pari o dispari sui due indici $\alpha_2\,\alpha_3$.

Una soluzione completa si ottiene esprimendo $a^{[n]}_{\alpha_2\alpha_3}$ in funzione delle $a^{[n]}_{0\,\alpha_3} = k^{[n]}_{0\,\beta_3}$, $a^{[n]}_{1\,\alpha_3} = k^{[n]}_{1\,\beta_3}$. Posto ancora $\beta_2 = \frac{1-(-1)^{\alpha_2}}{2}$, si trova:

$$\text{(4)} \qquad a^{[n]}_{\alpha_2\alpha_3} = (-1)^{\frac{\alpha_2-\beta_2}{2}} \sum_{\alpha_3}^{\alpha_2+\alpha_3-\beta_2}{}_{\beta_3} \binom{\frac{\alpha_2-\beta_2}{2}}{\frac{\beta_3-\alpha_3}{2}} k^{[n]}_{\beta_2\beta_3} \qquad \begin{array}{l}\beta_3 \text{ pari se } \alpha_3 \text{ pari}\\ \beta_3 \text{ dispari se } \alpha_3 \text{ dispari}\,.\end{array}$$

Sostituendo la (4) nella (2), e raccogliendo i $k^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$ a fattor comune, tenendo presente le condizioni:

$$\beta_2 = 0, 1 \qquad \alpha_2 - \beta_2 \geq \beta_3 - \alpha_3 \qquad \alpha_2 \geq \beta_2 + \beta_3 - \alpha_3$$

$$\beta_3 = 0, 1, 2 \cdots (n - \beta_2) \qquad \beta_3 \geq \alpha_3 \geq \frac{1-(-1)^{\beta_3}}{2} \qquad n - \frac{1-(-1)^{n-\alpha_2-\alpha_3}}{2} \geq \alpha_2 + \alpha_3$$

si ottiene

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{T}_n = \frac{1}{n!} \sum_{0}^{1}{}_{\beta_2} \sum_{0}^{n-\beta_2}{}_{\beta_3} k^{[n]}_{\beta_2\beta_3} \sum_{\frac{1-(-1)^{\beta_3}}{2}}^{\beta_3}{}_{\alpha_3} \sum_{\beta_2+\beta_3-\alpha_3}^{n-\alpha_3-\frac{1-(-1)^{n-\beta_2-\beta_3}}{2}}{}_{\alpha_2} (-1)^{\frac{\alpha_2-\beta_2}{2}} \binom{n}{\alpha_2} \times$$

$$\times \binom{n-\alpha_2}{\alpha_3} \binom{\frac{n-\beta_2}{2}}{\frac{\beta_3-\alpha_3}{2}} x^{(n-\alpha_2-\alpha_3)} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} .$$

Dove α_2 ed α_3 variano con incrementi di due. La serie di MacLaurin armonica è quindi:

$$T(xyz) = T_0 + \sum_1^\infty{}_n T_n(xyz) . \tag{6}$$

Facciamo notare che il numero totale delle costanti k della ridotta m–sima della (6) è $(m+1)^2$.

SERIE ARMONICA IN DUE VARIABILI

Invariante per traslazione lungo l'asse zeta.

Ponendo $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$ nella (5) si ottiene:

$$T_n = \frac{1}{n!}\sum_0^1{}_{\beta_2} k_{\beta_2}^{[n]} \sum_{\beta_2}^{n-\frac{1-(-1)^{n}-\beta_2}{2}}{}_{\alpha_2} (-1)^{\frac{\alpha_2-\beta_2}{2}} \binom{n}{\alpha_2} x^{(n-\alpha_2)} y^{\alpha_2} .$$

Dove α_2 procede per incrementi di due. Vediamo che ogni termine della serie resa armonica contiene due costanti arbitrarie. Lo sviluppo di MacLaurin armonico in due dimensioni diventa:

$$T(xy) = T_0 + \sum_1^\infty{}_n T_n(xy) . \tag{6 bis}$$

Il numero totale dei coefficienti k della ridotta m–sima della $T(xy)$ è $2m+1$.

SERIE ARMONICA INVARIANTE PER ROTAZIONE

Il sistema di riferimento è cilindrico, con asse zeta coincidente con l'asse di rivoluzione. In questo modo la serie dipende da due sole variabili z ed r. Il termine n–simo dello sviluppo si può scrivere $(\alpha_1 + \alpha_2 = n)$:

$$L_n = \frac{1}{n!}\sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!} a_{\alpha_1\alpha_2}^{[n]} z^{\alpha_1} r^{\alpha_2} = \frac{1}{n!}\sum_0^n{}_{\alpha_2} \binom{n}{\alpha_2} a_{\alpha_2}^{[n]} z^{n-\alpha_2} r^{\alpha_2} . \tag{7}$$

La serie diventa

$$L(z, r) = L_0 + \sum_1^\infty{}_n L_n(z, r) . \tag{8}$$

Imponendo alla serie (8), e quindi al suo termine n–simo (7), la condizione di armonicità

$$\nabla^2 L_n = \frac{\partial^2 L_n}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial L_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 L_n}{\partial r^2} = 0$$

si ottengono facilmente le seguenti relazioni fra i coefficienti:

$$\begin{cases} a_1^{[n]} = 0 \\ \left[a_{\alpha_2}^{[n]} + a_{\alpha_2+2}^{[n]} + \dfrac{1}{\alpha_2+1} a_{\alpha_2+2}^{[n]}\right] = 0 \end{cases} \qquad \alpha_2 = 0, 1, 2 \cdots (n-2)$$

che possono essere scritte

$$(9) \qquad \begin{cases} a_1^{[n]} = 0 \\ a_{\alpha_2}^{[n]} + \dfrac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 + 1}\, a_{\alpha_2+2}^{[n]} = 0 \end{cases}$$

Il sistema (9) omogeneo di n equazioni in $n+1$ incognite è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni diverse da quella banale. Se ne deduce che tutte le costanti di indice dispari sono nulle, e che una sola costante di indice pari è indipendente. La scelta di quest'ultima è arbitraria, perché scelte diverse danno luogo a soluzioni linearmente dipendenti. Scegliendo $a_0^n = k_0^n$ si ottiene:

$$(10) \qquad a_{\alpha_2}^{[n]} = (-1)^{\frac{\alpha_2}{2}} \binom{\alpha_2}{\frac{\alpha_2}{2}} \frac{1}{2^{\alpha_2}}\, a_0^{[n]}$$

e quindi

$$(11) \qquad T_n = \frac{k_0^{[n]}}{n!} \sum_{0}^{n - \frac{1-(-1)^n}{2}} {}_{\alpha_2}\, (-1)^{\frac{\alpha_2}{2}} \binom{n}{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{\frac{\alpha_2}{2}} \frac{1}{2^{\alpha_2}}\, z^{n-\alpha_2}\, r^{\alpha_2} .$$

Dove α_2 varia da zero a $n - \frac{1-(-1)^n}{2}$ per incrementi di due. Ogni termine della serie armonica con simmetria di rivoluzione sull'asse zeta contiene un solo coefficiente $k_0^{[n]}$:

$$(12) \qquad T(zr) = T_0 + \sum_{1}^{\infty} {}_n\, T_n(zr) .$$

Il numero totale dei coefficienti k della ridotta m–sima della (12) è $m+1$.

Facciamo notare che qualora le funzioni armoniche approssimande rappresentino potenziali magnetostatici o elettrostatici, i termini n–simi delle serie scritte rappresentano i potenziali dei « multipoli tecnici » elementari, alcuni dei quali coincidono con i potenziali di lenti elettroniche spesso realizzate; i potenziali di tutte le altre lenti dell'Ottica Elettronica possono essere considerate come combinazioni dei potenziali di « multipoli tecnici » elementari.

3. Consideriamo ora lo sviluppo (6). La ridotta m–sima di tale serie, una volta che le $(m+1)^2$ costanti $k_{\beta_2\beta_3}^{[n]}$ siano determinate nel modo detto nel paragrafo 1, costituisce la funzione approssimante la funzione armonica F_i nello spazio interno ad un contorno chiuso e nota in $(m+1)^2$ punti di esso. Facciamo notare che tale funzione approssimante Pm non può più essere considerata come la ridotta m–sima della serie di MacLaurin armonica, in quanto i coefficienti $k_{\beta_2\beta_3}^{[n]}$ calcolati non sono più proporzionali alle derivate nell'origine. La funzione Pm

$$(13) \qquad P_m = k^{[0]} + \sum_{1}^{m} {}_n \frac{1}{n!} \sum_{0}^{1} {}_{\beta_2} \sum_{0}^{n-\beta_2} {}_{\beta_3}\, k_{\beta_2\beta_3}^{[n]}\, p_{\beta_2\beta_3}^{[n]}$$

dove

$$(14) \qquad p^{[n]}_{\beta_2\beta_3} = \sum_{\frac{1-(-1)^{\beta_3}}{2}}^{\beta_3}{}_{\alpha_3} \sum_{\beta_2+\beta_3-\alpha_3}^{n-\alpha_3-\frac{1-(-1)^{n-\beta_2-\beta_3}}{2}}{}_{\alpha_2} (-1)^{\frac{\alpha_2-\beta_2}{2}} \binom{n}{\alpha_2}\binom{n-\alpha_2}{\alpha_3}\binom{\frac{n-\beta_2}{2}}{\frac{\beta_3-\alpha_3}{2}} x^{n-\alpha_2-\alpha_3} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}$$

è dunque un polinomio armonico, di grado m, costituito da somme di polinomi omogenei armonici $p^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$ di grado crescente da zero ad m, moltiplicati ciascuno per il corrispondente elemento della $(m+1)^2$–pla $k^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$ definita dalle condizioni al contorno. La P_m non può dunque diventare infinita che all'infinito e quindi, a norma del teorema di Dirichlet ed in virtù dei suoi $(m+1)^2$ «gradi di libertà», è univocamente determinata dentro un qualsiasi contorno finito al quale appartengano gli $(m+1)^2$ punti in cui la funzione è nota.

4. Qualora si voglia estendere il metodo alla approssimazione di una funzione F_e armonica in uno spazio infinito esterno ad un contorno chiuso e su questa nota in $(m+1)^2$ punti, basta applicare il metodo sopra descritto partendo questa volta da una serie armonica costituita da polinomi $q^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$ armonici nello spazio esterno al contorno e che soddisfino alle condizioni normali all'infinito. Tali polinomi si possono ottenere dai $p^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$ mediante la

$$(15) \qquad h^{[n]}_{\beta_2\beta_3}\, q^{[n]}_{\beta_2\beta_3} = h^{[n]}_{\beta_2\beta_3} \frac{p^{[n]}_{\beta_2\beta_3}}{r^\alpha} = [c^{[n]}_{\beta_2\beta_3}]^\alpha k^{[n]}_{\beta_2\beta_3} \frac{p^{[n]}_{\beta_2\beta_3}}{r^\alpha}$$

dove le $h^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$ sono costanti arbitrarie, $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ e dove α deve essere determinato in modo che le $q^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$ soddisfino alle condizioni richieste. Imponendo l'armonicità delle $q^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$

$$\nabla^2 q^{[n]}_{\beta_2\beta_3} = p^{[n]}_{\beta_2\beta_3} \nabla^2\left(\frac{1}{r^\alpha}\right) + 2\nabla(p^{[n]}_{\beta_2\beta_3})\,\nabla\left(\frac{1}{r^\alpha}\right) + \frac{1}{r^\alpha}\nabla^2(p^{[n]}_{\beta_2\beta_3}) = 0$$

da cui a norma del teorema di Eulero:

$$p^{[n]}_{\beta_2\beta_3} = \frac{2}{\alpha-1}\,\bar{r}\cdot\nabla(p^{[n]}_{\beta_2\beta_3}) = \frac{1}{n}\left(x\frac{\partial p^{[n]}}{\partial x} + y\frac{\partial p^{[n]}}{\partial y} + z\frac{\partial p^{[n]}}{\partial z}\right).$$

Ne segue che $\alpha = 2n+1$. Si può anche verificare che per $\alpha = 2n+1$ sono soddisfatte le condizioni di normalità all'infinito delle $q^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$. Si ottiene quindi una funzione Q_m costituita dalla somma dei polinomi $q^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$ moltiplicati per le $h^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$, che possiede ancora $(m+1)^2$ «gradi di libertà» nelle $h^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$ e che approssima la funzione F_e. È dunque:

$$(16) \qquad Q_m = \frac{h^{[0]}}{r} + \sum_1^m{}_n \frac{1}{n!}\sum_0^1{}_{\beta_2}\sum_0^{n-\beta_2}{}_{\beta_3} h^{[n]}_{\beta_2\beta_3}\frac{p^{[n]}_{\beta_2\beta_3}}{r^{2n+1}}$$

dove $p^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$ è definito dalla (14). Se la funzione F_e non ammette «monopolo», si deve porre nella (16) $h^{[0]} = 0$.

Qualora le due funzioni Q_m e P_m siano determinate partendo dalle medesime condizioni al contorno su un insieme di $(m+1)^2$ punti di esso, esse possono essere considerate la trasformata l'una dell'altra rispetto a quell'insieme di punti. Se tali punti giacciono su un contorno sferico con centro nell'origine dello sviluppo e raggio R, si può verificare, partendo dalla (15) che $h^{[n]}_{\beta_2\beta_3} = R^{2n+1} k^{[n]}_{\beta_2\beta_3}$. In questo caso particolare la Q_m è la trasformata secondo Lord Kelvin della P_m. Queste considerazioni si possono estendere a funzioni di due variabili partendo dalle (6 bis) e (12).

Considerazioni sugli errori del metodo

Se i valori che la F_i assume sul contorno sono assegnati (quindi esenti da errori di misura), si può definire e calcolare sul contorno una funzione di errore $e = F_i - P_m$, anch'essa armonica e approssimabile dentro il contorno col metodo descritto. Si fa notare che la funzione (e), essendo armonica, assume i suoi massimi e minimi proprio sul contorno. Da queste considerazioni si possono elaborare caso per caso tecniche per la correzione della funzione F_i mediante la (e) o la ricerca dell'errore massimo di approssimazione del metodo.

Se i valori della F_i disponibili sono affetti da errori sperimentali di misura, conviene sfruttare la precisione del metodo (maggiore di quella di misura) effettuando misure in eccesso, tutte al contorno, sul quale si può rendere minima la (e) con il metodo sopra descritto.

Si conclude osservando che la scelta del numero N di punti dipende dalla capacità del calcolatore, intesa sia come estensione della memoria che come dimensioni della parola.

Bibliografia

E. Persico, *Introduzione alla Fisica Matematica* (Zanichelli, Bologna).
E. Durand, *Electrostatique*, Masson et Cie, Paris 1966.
E. Durand, *Magnetostatique*, Masson et Cie, Paris 1968.
H. Wind, « J. Comput. Phys. », *2*, 274 (1968).
H. Wind, « Nucl. Instr. Meth. », *84*, 117–124 (1970).
E. P. Miles Jr. e Williams, « Proc. Am. Math. Soc. », *6*, 191 (1955).
M. H. Protter, « Trans. Am. Math. Soc. », *63*, 314 (1948).
M. H. Protter, « Portugaliae Mathematica », *10*, 11 (1951).