Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Sulle superficie d'onda elettromagnetiche in un plasma elettricamente anisotropo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.4, p. 597–603.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_597_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Plasmodinamica. — *Sulle superficie d'onda elettromagnetiche in un plasma elettricamente anisotropo.* Nota [(*)] del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper we consider the propagation of electromagnetic wave in a very rarefied plasma, on the assumption that the magnetic field determines an electric anisotropie and the dielectric power is a tensor with parallel and perpendicular component to the magnetic field. We establish the differential equation of the wave surface and the equation that define the velocity of propagation; we give of the last an approximate solution, and finally we consider the significant case in which the magnetic field is tangent to the wave surface. In this case the velocity of propagation of the wave front is dependent on the normal component to the wave surface of the Poynting vector.

Another interesting case is that in which the parallel component to the magnetic field of the electric field, and the perpendicular component, have the same projection on the normal to the wave surface.

1. Nello studio del movimento di un plasma molto rarefatto, soggetto a un campo magnetico, viene spesso considerata una anisotropia della pressione.

Ora io ho pensato che in un plasma, oltre all'anisotropia della pressione, vi può essere anche, analogamente a quanto avviene nei mezzi cristallini, una anisotropia elettrica, determinata dal campo magnetico, nel senso che il *potere dielettrico* ε sarà un tensore con una componente $\varepsilon_{\parallel}$ parallela al campo magnetico e un'altra $\varepsilon_{\perp}$ perpendicolare ad esso.

In questa ipotesi, in questa Nota, riferendomi per ora alla sola propagazione di onde elettromagnetiche, mi sono proposto di stabilire l'equazione differenziale delle superficie d'onda, applicando il ben noto metodo delle caratteristiche dei sistemi differenziali [(1)], e quindi l'equazione che dà le possibili velocità V di propagazione del fronte d'onda.

Quest'ultima equazione, che è di quarto grado completa in V, alquanto complicata, mostra che in generale sono possibili quattro distinte velocità di propagazione, che nel caso dell'isotropia si riducano alla sola velocità della luce.

In detta equazione compare il parametro $k = (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp})/\varepsilon_{\parallel}$, che dipende dalla differenza delle due componenti, parallela e perpendicolare al campo magnetico, del potere dielettrico. Per ottenere qualche risultato concreto ho considerato il caso particolarmente interessante in cui il parametro k è sufficientemente piccolo da poter trascurare i termini di ordine superiore al suo

(*) Presentata nella seduta del 14 aprile 1973.

(1) Cfr. T. LEVI CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa.* Zanichelli, Bologna 1931.

quadrato. In questo caso esiste realmente un fenomeno di propagazione ondosa se tra il campo elettrico e il campo magnetico è soddisfatta una certa condizione [la (24)]. Un caso notevole, fisicamente significativo, in cui questa condizione è verificata, è quello in cui il campo magnetico è tangente alla superficie d'onda. In questo caso la velocità di propagazione del fronte d'onda, che è stata determinata esplicitamente (25), dipende dall'intensità del campo magnetico e dalla componente normale alla superficie d'onda del vettore di Poynting (2).

Un altro caso notevole si ha quando la componente del campo elettrico parallela al campo magnetico, e quella perpendicolare, hanno la stessa proiezione sulla normale alla superficie d'onda.

2. Le equazioni del campo elettromagnetico in un plasma sono, come è noto,

$$\text{rot}\, \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{I} + \mu \frac{\partial (\varepsilon \boldsymbol{E})}{\partial t} \tag{1}$$

$$\text{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad (\text{div}\, \boldsymbol{B} = 0), \tag{2}$$

essendo $\boldsymbol{B}$ l'induzione magnetica, $\boldsymbol{E}$ l'intensità del campo elettrico ed $\boldsymbol{I}$ la densità di corrente espressa da

$$\boldsymbol{I} = \sigma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}) + \rho_e \boldsymbol{v}, \tag{3}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la velocità media delle particelle del plasma, ρ_e la densità media delle cariche elettriche, σ la sua conduttività elettrica e μ la permeabilità magnetica, le quali ultime le supponiamo costanti.

Il potere dielettrico ε lo supponiamo invece variabile, a carattere tensoriale, nel senso che esso ha due determinazioni distinte, una $\varepsilon_{\parallel}$ nella direzione parallela al campo magnetico e l'altra $\varepsilon_{\perp}$ nella direzione perpendicolare al detto campo. Supporremo cioè che il campo magnetico generi una anisotropia elettrica nel plasma, per cui avremo

$$\varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_{\parallel} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{\perp} (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \varepsilon_{\perp} \boldsymbol{E} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}, \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{B}/B$ è vettore unitario diretto tangenzialmente al campo magnetico.

Alle equazioni (1) e (2) va associata l'equazione di continuità delle cariche elettriche.

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div}\, \boldsymbol{I} = 0. \tag{5}$$

(2) Per maggiori dettagli sui risultati di questo lavoro vedere la Nota che porta lo stesso titolo in scritti offerti in onore di Antonio Mambriani, in corso di pubblicazione in un volume dei « Rendiconti del Seminario Matematico di Parma ».

Come conseguenza di questa e della (1) si ha anche

$$\rho_e = \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) . \tag{6}$$

Ciò premesso vogliamo determinare l'equazione differenziale delle superficie d'onda elettromagnetiche nel plasma considerato, applicando il ben noto metodo delle caratteristiche.

Per questo supporremo ancora, come si usa fare nella determinazione delle superficie d'onda di Fresnel nei mezzi cristallini triassici, che il potere dielettrico ε del plasma, pur essendo eventualmente variabile da punto a punto e col tempo, sia continuo colle sue derivate, attraverso la superficie d'onda, mentre indicheremo con $\boldsymbol{e}$ con $\boldsymbol{b}$ rispettivamente i vettori caratteristici che rappresentano la discontinuità delle derivate prime del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e dell'induzione magnetica $\boldsymbol{B}$.

Essendo Δ il simbolo di discontinuità, dalle equazioni (1) e (2) avremo allora

$$\Delta \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu \Delta \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \boldsymbol{E}) \tag{7}$$

$$\Delta \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\Delta \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} . \tag{8}$$

Osserviamo che applicando l'operazione di discontinuità alla (5) si avrebbe l'equazione di discontinuità delle derivate di ρ_e dopo aver determinate le discontinuità delle derivate prime di $\boldsymbol{B}$ ed $\boldsymbol{E}$ per mezzo delle (7) ed (8), e quelle delle derivate prime di $\boldsymbol{v}$ per mezzo delle equazioni idromagnetiche. Ma di questo non vogliamo occuparci.

È da rilevare ancora che applicando l'operazione di discontinuità ad ambo i membri della (6) si ha

$$\Delta \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 0 , \tag{9}$$

ma vedremo che la (9) è conseguenza della (7). Ci rimane dunque da considerare soltanto le equazioni (7) e (8), dove il vettore spostamento elettrico $\varepsilon \boldsymbol{E}$ di Maxwell è espresso dalla (4).

Ora, se $\varphi(x_1, x_2, x_3, t) =$ cost. è l'equazione di una superficie d'onda, si ha

$$\Delta \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \operatorname{grad} \varphi \wedge \boldsymbol{b} \quad , \quad \Delta \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \boldsymbol{b}$$

$$\Delta \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \varphi \wedge \boldsymbol{e}$$

$$\Delta \frac{\partial (\varepsilon \boldsymbol{E})}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left\{ \varepsilon_{\perp} \boldsymbol{e} + \frac{\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}}{\mathrm{B}^2} \left[\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \left(\boldsymbol{b} - 2 \frac{\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{b}}{\mathrm{B}^2} \boldsymbol{B} \right) \right] \right\} .$$

Sostituendo nelle (7) ed (8) e ponendo

$$\operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{p} = g \boldsymbol{n} \, , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = p_0 \, , \tag{10}$$

dove $g = |\boldsymbol{p}|$, ed $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale alla superficie d'onda $\varphi =$ cost., si ottengono le equazioni

$$(11) \quad g\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{b} = \mu p_0 \left\{ \varepsilon_\perp \boldsymbol{e} + \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{\mathrm{B}^2} \left[\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{b} - 2\frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{b}}{\mathrm{B}^2}\boldsymbol{B}\right)\right]\right\}$$

$$(12) \quad g\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{e} = -p_0\,\boldsymbol{b}\,.$$

Dalla (12) si ricava intanto

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b} = 0\,,$$

la prima delle quali deriva dalla condizione div $\boldsymbol{B} = 0$, ed esprime che il vettore caratteristico $\boldsymbol{b}$ è tangente alla superficie d'onda; inoltre i due vettori $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$ sono ortogonali fra loro.

Moltiplicando ambo i membri della (11) scalarmente per $\boldsymbol{n}$ si ottiene

$$(13) \qquad \varepsilon_\perp \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n} + \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{\mathrm{B}^2}\,\mathrm{B}_n\left(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\,\frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{b}}{\mathrm{B}^2}\right) = 0\,,$$

che non è altro che lo sviluppo della (9). Eliminando il vettore $\boldsymbol{b}$ per mezzo della (12) si ha anche

$$(13') \qquad \left\{ \varepsilon_\perp \boldsymbol{n} + \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{\mathrm{B}^2}\,\mathrm{B}_n\left(\boldsymbol{B} - \frac{g}{p_0}\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{n} + 2\,\frac{g}{p_0}\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\mathrm{B}^2}\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n}\right)\right\}\times\boldsymbol{e} = 0\,,$$

la quale esprime che il vettore caratteristico $\boldsymbol{e}$ è perpendicolare al vettore racchiuso tra graffe.

Le equazioni (11) e (12) sono lineari omogenee nei due vettori caratteristici $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$. Eliminando fra esse il vettore $\boldsymbol{b}$ si ottiene facilmente l'equazione

$$(14) \qquad \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = \mu\left\{\frac{p_0^2}{g^2}\left(\varepsilon_\perp \boldsymbol{e} + \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{\mathrm{B}^2}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{B}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{p_0}{g}\,\frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{\mathrm{B}^2}\left[\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{e} - 2\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\mathrm{B}^2}\,\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{B}\right]\right\}.$$

Con riferimento a tre assi cartesiani ortogonali (x_1, x_2, x_3) la (14) dà luogo a tre equazioni scalari, lineari omogenee, nelle tre componenti e_1, e_2, e_3 del vettore $\boldsymbol{e}$. Uguagliando a zero il determinante dei coefficienti di queste componenti si ha l'equazione differenziale della superficie d'onda.

Effettuando i calcoli, ponendo

$$(15) \qquad k = \frac{\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \quad , \quad c_\parallel^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon_\parallel} \quad , \quad c_\perp^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon_\perp}\,,$$

e ordinando rispetto a p_0/g, dopo qualche semplificazione si ottiene

$$(16) \qquad \frac{p_0^4}{g^4} + k\,\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n}{\mathrm{B}^2}\,\frac{p_0^3}{g^3} + \left\{ -(c_\parallel^2 + c_\perp^2) - kc_\perp^2\,\frac{\mathrm{B}_n^2}{\mathrm{B}^2} + \right.$$
$$\left. + k^2\,\frac{c_\perp^2}{c_\parallel^2}\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\mathrm{B}^4}\left[\left(1 + \frac{c_\perp^2}{c_\parallel^2}\right)\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\mathrm{B}^2}\,\mathrm{B}_n^2 - \mathrm{E}_n\,\mathrm{B}_n\right]\right\}\frac{p_0^2}{g^2} -$$
$$- kc_\perp^2\,\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n}{\mathrm{B}^2}\,\frac{p_0}{g} + c_\parallel^2\,c_\perp^2 + kc_\perp^4\,\frac{\mathrm{B}_n^2}{\mathrm{B}^2} = 0\,.$$

che è la cercata equazione differenziale delle superficie d'onda.

Indicando con

$$V = -\frac{p_0}{g} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big/|\operatorname{grad}\varphi| \tag{17}$$

la velocità di propagazione del fronte d'onda, la (16) porge

$$\begin{aligned} V^4 - k\,\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n}{B^2}\,V^3 + \Big\{ &-(c_{\|}^2 + c_{\perp}^2) - k c_{\perp}^2\,\frac{B_n^2}{B^2} + \\ &+ k^2\,\frac{c_{\perp}^2}{c_{\|}^2}\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^4}\left[\left(1+\frac{c_{\perp}^2}{c_{\|}^2}\right)\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\,B_n^2 - E_n\,B_n\right]\Big\}V^2 + \\ &+ k c_{\perp}^2\,\frac{(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n}{B^2}\,V + c_{\|}^2 c_{\perp}^2 + k c_{\perp}^4\,\frac{B_n^2}{B^2} = 0\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Questa equazione, che è di 4° grado completa in V, fornirà in generale quattro valori per V, e se essi saranno tutti reali si avranno quattro velocità di propagazione.

3. L'integrazione dell'equazione differenziale (16) si presenta in generale oltremodo difficile, e per questo occorrerebbe innanzitutto integrare le equazioni di Maxwell, che sono legate d'altra parte con la velocità media delle particelle del plasma.

Per ottenere qualche risultato concreto considereremo il caso fisicamente interessante, in cui l'anisotropia elettrica del plasma è sufficientemente piccola da poter trascurare nella risoluzione della (16) rispetto a p_0/g, o della (18) rispetto a V, i termini di ordine superiore al secondo nel parametro $k = (\varepsilon_{\|} - \varepsilon_{\perp})/\varepsilon_{\|}$.

Riferendoci all'equazione (18) supporremo allora la V sviluppabile in serie di potenze di k della forma

$$V = V_0 + \left(\frac{dV}{dk}\right)_0 k + \frac{1}{2}\,\frac{d^2V}{dk^2}\,k^2 + \cdots \tag{19}$$

Poiché per $k = 0$, $(\varepsilon_{\|} = \varepsilon_{\perp})$, è $c_{\|}^2 = c_{\perp}^2 = c^2$, se si indica con $f(V(k), k)$ il primo membro della (18), risulta

$$f(V(0), 0) \equiv V_0^4 - 2c^2 V_0^2 + c^4 = 0\,, \tag{20}$$

e questa porge $V_0^2 = c^2$, che è il quadrato della velocità della luce in un mezzo isotropo.

Calcolando ora, in base alla teoria delle funzioni implicite, le successive derivate totali della funzione f rispetto a k, per $k = 0$, e uguagliandole a zero, si trovano le relazioni

$$\left(\frac{df}{dk}\right)_0 \equiv 0 \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2f}{dk^2}\right)_0 = 8c^2\left(\frac{dV}{dk}\right)_0^2 - \frac{4c^2}{B^2}\,[(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n + cB_n^2]\left(\frac{dV}{dk}\right)_0 + \\ + 2c^2\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^4}\left(2\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\,B_n^2 - E_n\,B_n\right) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

$$(23)\qquad \left(\frac{d^3 f}{dk^3}\right)_0 = 24\,c\left(\frac{dV}{dk}\right)_0^3 - \frac{6c}{B^2}\left[3(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n + cB_n^2\right]\left(\frac{dV}{dk}\right)_0^2 + $$
$$+ 12\,c\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^4}\left(2\,\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}\,B_n^2 - E_n\,B_n\right)\left(\frac{dV}{dk}\right)_0 +$$
$$+ 3\left\{8\,c^2\left(\frac{dV}{dk}\right)_0 - \frac{2c^2}{B^2}\left[(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n + cB_n^2\right]\right\}\left(\frac{d^2V}{dk^2}\right)_0 = 0$$

. . . .

La (22) fornisce per $\left(\frac{dV}{dk}\right)_0$ due valori reali se è verificata la condizione

$$(24)\qquad \left[(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n + cB_n^2\right]^2 - 4\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\left(2\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\,\frac{B_n^2}{B^2} - E_n\,B_n\right) > 0\,.$$

In tal caso la (23), e le successive relazioni che si ottengono oltre la (23), forniscono le altre derivate $\left(\frac{d^2V}{dk^2}\right)_0, \cdots$, e si hanno quindi dalla (19) due possibili velocità di propagazione del fronte d'onda.

Un caso notevole, fisicamente significativo, in cui la condizione (24) è verificata, si ha quando $B_n = 0$, cioè il campo magnetico è tangente alla superficie d'onda (3). In questo caso la (22) porge

$$\left(\frac{dV}{dk}\right)_0 = \frac{1}{2\,B^2}\,(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n$$

e quindi dalla (23) si ricava

$$\left(\frac{d^2V}{dk^2}\right)_0 = \frac{1}{4\,c\,B^4}\,(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n^2\,.$$

Pertanto a meno di termini di ordine superiore al 2° in k, la (19) porge

$$(25)\qquad V = c + \frac{1}{2\,B^2}\,(E\wedge B)_n\,k + \frac{1}{8\,c\,B^4}\,(E\wedge B)_n^2\,k^2,$$

che è, nell'approssimazione considerata, una possibile velocità di propagazione, la quale dipende dalla componente normale alla superficie d'onda del vettore di Poynting (4).

(3) La condizione (24) è anche verificata se il campo elettrico e il campo magnetico sono ortogonali, cioè $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = 0$. Ma in questo caso la (4) porge $\varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_\perp\boldsymbol{E}$, e la componente $\varepsilon_\parallel$ di ε, come pure la differenza $\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$, non hanno alcuna influenza sul fenomeno di propagazione.

(4) È opportuno osservare che se supponiamo il campo magnetico perpendicolare alla superficie d'onda, abbiamo

$$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{n}\quad,\quad B_n^2 = B^2\quad,\quad \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = BE_n\quad,\quad (\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{B})_n = B(\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{n})_n = 0\,,$$

e l'equazione (18) diventa

$$V^4 - \left(2\,c_\perp^2 - k^2\,\frac{c_\perp^4}{c_\parallel^4}\,\frac{E_n^2}{B^2}\right)V^2 + c_\perp^4 = 0\,,$$

che si può scrivere

$$(V^2 - c_\perp^2)^2 + k^2\,\frac{c_\perp^4}{c_\parallel^4}\,\frac{E_n^2}{B^2}\,V^2 = 0\,,$$

la quale ammette soluzioni reali soltanto se $k = 0$, caso che escludiamo, oppure se $E_n = 0$, cioè se il campo elettrico è tangenziale. In quest'ultimo caso si hanno soltanto onde sferiche che si propagano con velocità $c_\perp$.

Un altro caso notevole, più generale, in cui la condizione (24) è soddisfatta si ha quando

$$E_n = 2\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\,\frac{B_n}{B^2}\,. \tag{26}$$

In questo caso le relazioni (22) e (23) dànno

$$\left(\frac{dV}{dk}\right)_0 = \frac{1}{2\,B^2}\,[(E\wedge B)_n + cB_n^2]$$

$$\left(\frac{d^2V}{dk^2}\right)_0 = \frac{1}{4\,c\,B^4}\,[(E\wedge B)_n^2 - c^2\,B_n^4]\,,$$

e la (19) porge

$$V = c + \frac{1}{2\,B^2}\,[(E\wedge B)_n + cB_n^2]\,k + \frac{1}{8\,c\,B^4}\,[(E\wedge B)_n^2 - c^2\,B_n^4]\,k^2. \tag{27}$$

La condizione (26) equivale alla

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\times\beta\cdot\beta)\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{E}\times\beta\cdot\beta\times\boldsymbol{n}\,,$$

e sussiste quando la componente del campo elettrico parallela al campo magnetico, e quella perpendicolare, hanno la stessa proiezione sulla normale alla superficie d'onda.