Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Edvige Pucci

Sulle precessioni semiregolari di un solido pesante ad asse di precessione verticale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.4, p. 591–596.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_591_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Meccanica razionale. — *Sulle precessioni semiregolari di un solido pesante ad asse di precessione verticale.* Nota di EDVIGE PUCCI, presentata [(*)] dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — We have examined the case of a heavy rigid body with a fixed point, and have been able to show that no precessional movement is dynamically possible with a vertical precession axis where the rotation speed is constant and the precession speed variable (semiregular precessions).

INTRODUZIONE

G. Grioli [2] ha dimostrato l'esistenza di precessioni regolari di un solido pesante fissato senza attrito per un suo punto O, e successivamente ha posto il problema della possibilità dinamica di precessioni non regolari [(1)]. Egli stesso [3] ha determinato una classe di precessioni non regolari con asse di precessione verticale, per le quali la velocità di precessione è costante, mentre la velocità di rotazione propria varia nel tempo. Tale classe di precessioni, che si possono definire semiregolari, è possibile se sono soddisfatte le condizioni strutturali di Hess, ed è costituita da moti alla Hess. È stato successivamente riconosciuto [4], [5] che questa classe esaurisce l'insieme delle precessioni semiregolari del tipo detto per il corpo rigido pesante.

Nella stessa Nota [3] G. Grioli ha anche dimostrato che non sono dinamicamente possibili precessioni non regolari ad asse verticale, quando l'asse di figura è una delle rette baricentriche ortogonali ai piani ciclici dell'ellissoide d'inerzia o coincide con uno degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso. Nella presente Nota si esamina il problema della possibilità dinamica di precessioni semiregolari ad asse di precessione verticale, ma di tipo diverso da quello già esaminato, e cioè tali che la velocità di rotazione propria sia costante, mentre la velocità di precessione può variare con il tempo.

Si dimostra che moti di questo tipo non sono dinamicamente possibili per il corpo rigido pesante. Si ritrovano, ovviamente, le precessioni regolari del giroscopio pesante.

(*) Nella seduta del 14 aprile 1973.

(1) Per precessioni non regolari si intendono moti in cui la velocità angolare ω è data da

$$\omega = \nu\gamma + \mu\kappa$$

con γ versore fisso nello spazio e κ versore fisso nel corpo. $\nu = \nu(t)$ e $\mu = \mu(t)$ sono funzioni generalmente variabili nel tempo e sono note con il nome di velocità angolare di precessione e velocità di rotazione propria rispettivamente.

1. Compatibilità con gli integrali primi

In questo numero si determinano le precessioni semiregolari che soddisfano ai ben noti teoremi di conservazione dell'energia e della componente verticale del momento delle quantità di moto che sussistono per un corpo rigido pesante. La compatibilità del moto con gli integrali primi è infatti necessaria per la possibilità dinamica del moto.

Per le precessioni semiregolari in esame la velocità angolare ha la forma

$$\omega = \nu \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{\varkappa} . \tag{1}$$

Si cercano moti in cui $\boldsymbol{c}$ è il versore della verticale, che si conviene di orientare verso il basso, $\boldsymbol{\varkappa}$ un versore solidale al corpo, μ è una costante, mentre ν può dipendere dal tempo. È sempre possibile scegliere una terna solidale $T(O, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ tale che sia $\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{i}_3$, e tale che la matrice d'inerzia del solido abbia la forma ridotta

$$\sigma = \begin{bmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix} \qquad (A \geq B) .$$

È allora

$$\omega = \nu \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{i}_3 . \tag{2}$$

È chiaro che se $\mu = 0$ oppure se $\boldsymbol{i}_3$ è parallelo a $\boldsymbol{c}$, il moto degenera in un moto rotatorio attorno alla verticale. Un moto siffatto soddisfa agli integrali primi detti se e solo se è uniforme. Nel caso generale in cui $\mu \neq 0$ ed $\boldsymbol{i}_3$ non è parallelo a $\boldsymbol{c}$, le equazioni di Poisson danno le seguenti espressioni esplicite per le componenti del versore $\boldsymbol{c}$:

$$c_1 = a \sin \mu (t - t_0) \tag{3.1}$$

$$c_2 = a \cos \mu (t - t_0) \tag{3.2}$$

$$c_3 = \pm \sqrt{1 - a^2} \tag{3.3}$$

con $a \neq 0$.

Per una precessione semiregolare l'integrale primo della componente verticale del momento della quantità di moto ha la forma

$$\nu \sigma \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} + \mu \sigma \boldsymbol{i}_3 \cdot \boldsymbol{c} = K_c = \text{costante} \tag{4}$$

mentre l'integrale primo dell'energia è

$$\nu^2 \sigma \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} + 2 \mu \nu \sigma \boldsymbol{i}_3 \cdot \boldsymbol{c} + \mu^2 \sigma \boldsymbol{i}_3 \cdot \boldsymbol{i}_3 - 2 OG^* \cdot \boldsymbol{c} = 2E_0 \tag{5}$$

dove con OG^* si è indicato il vettore $mgOG = \xi_i \boldsymbol{i}_i$, essendo m la massa totale del corpo e g il modulo dell'accelerazione di gravità.

Si ha poi dalle (3.1) e (3.2) la relazione

$$c_1^2 + c_2^2 = a^2 . \tag{6}$$

Eliminando ν tra (4) e (5) si ottiene

$$K_c^2 - \mu^2 (\sigma \boldsymbol{i}_3 \cdot \boldsymbol{c})^2 + \mu^2 (\sigma \boldsymbol{i}_3 \cdot \boldsymbol{i}_3)(\sigma \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}) - 2\, \mathrm{OG}^* \cdot \boldsymbol{c} (\sigma \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}) = 2 E_0 (\sigma \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}) . \tag{7}$$

La compatibilità con gli integrali primi si traduce nella necessità che l'equazione (7) sia soddisfatta da tutte le coppie di valori c_1 e c_2 che soddisfano alla (6), infatti dalle (3.1) e (3.2) si vede che durante il moto la coppia (c_1 , c_2) assume tutti questi valori.

La (7) è una equazione di terzo grado in c_1 e c_2, ha cioè la forma

$$\begin{aligned} \Phi (c_1 , c_2) = {} & a_{30} c_1^3 + a_{21} c_1^2 c_2 + a_{12} c_1 c_2^2 + a_{03} c_2^3 + \\ & + a_{20} c_1^2 + a_{11} c_1 c_2 + a_{02} c_2^2 + a_{10} c_1 + a_{01} c_2 + a_{00} = 0 \end{aligned} \tag{7'}$$

in cui

$$\begin{aligned} a_{30} &= -2 A \xi_1 \\ a_{21} &= -2 A \xi_2 \\ a_{12} &= -2 B \xi_1 \\ a_{03} &= -2 B \xi_2 \\ a_{20} &= -B'^2 \mu^2 + A (\mu^2 C - 2 \xi_3 c_3 - 2 E_0) + 4 B' \xi_1 c_3 \\ a_{11} &= -2 A' B' \mu^2 + 4 A' \xi_1 c_3 + 4 B' \xi_2 c_3 \\ a_{02} &= -A'^2 \mu^2 + B (\mu^2 C - 2 \xi_3 c_3 - 2 E_0) + 4 A' \xi_2 c_3 \\ a_{10} &= 2 B' C \mu^2 c_3 - 2 B' c_3 (\mu^2 C - 2 \xi_3 c_3 - 2 E_0) - 2 \xi_1 C c_3^2 \\ a_{01} &= 2 A' C \mu^2 c_3 - 2 A' c_3 (\mu^2 C - 2 \xi_3 c_3 - 2 E_0) - 2 \xi_2 C c_3^2 \\ a_{00} &= K_c^2 - \mu^2 C^2 c_3^2 + C c_3^2 (\mu^2 C - 2 \xi_3 c_3 - 2 E_0) . \end{aligned}$$

La (7') individua una curva del terzo ordine che deve contenere la circonferenza (6) e quindi deve spezzarsi nella circonferenza e in una retta. Deve cioè essere:

$$\Phi (c_1 , c_2) = (c_1^2 + c_2^2 - a^2)(l c_1 + m c_2 + n) = 0 \tag{8}$$

con l , m , n costanti opportune.

Ciò accade se e solo se

$$\begin{aligned} & l = a_{30} \ , \quad m = a_{21} \ , \quad l = a_{12} \ , \quad m = a_{03} \ , \quad n = a_{20} \ , \\ & 0 = a_{11} \ , \quad n = a_{02} \ , \quad -a^2 l = a_{10} \ , \quad -a^2 m = a_{01} \ , \\ & -a^2 n = a_{00} . \end{aligned} \tag{9}$$

Eliminando da queste le costanti l , m , n, si ottiene:

$$
(10) \qquad \begin{aligned} & a_{11} = 0 \quad , \quad a_{10} = -a^2 a_{30} = -a^2 a_{12} \quad , \quad a_{01} = -a^2 a_{03} = -a^2 a_{21} \, , \\ & a_{00} = -a^2 a_{20} = -a^2 a_{02} \, . \end{aligned}
$$

Sostituendo in queste equazioni le espressioni dei coefficienti a_{ij} in funzione delle costanti strutturali e di moto si ottengono le condizioni cui devono soddisfare queste costanti affinché il moto sia compatibile con gli integrali primi. Si riconosce con considerazioni algebriche che, esclusi i moti rotatori uniformi ($\mu = 0$, oppure i_3 verticale, oppure $\nu = 0$) sono compatibili con gli integrali primi i moti delle seguenti tre classi:

$$
(11.\mathrm{A}) \qquad \begin{aligned} & \xi_1 = \xi_2 = 0 \quad , \quad \mathrm{A}' = \mathrm{B}' = 0 \quad ; \quad \mathrm{K}_c = -\mathrm{C}\mu c_3 \, , \\ & \mu^2 \mathrm{C} - 2\,\xi_3\, c_3 - 2\,\mathrm{E}_0 = 0 \, . \end{aligned}
$$

$$
(11.\mathrm{B}) \qquad \begin{aligned} & \xi_1 = \xi_2 = 0 \quad , \quad \mathrm{B}' = 0 \quad ; \quad c_3 = 0 \, , \\ & \mathrm{A}\mathrm{A}'^2 a^2 \mu^2 + (\mathrm{B} - \mathrm{A})\mathrm{K}_c^2 = 0 \quad , \quad \mathrm{A}'^2 \mu^2 + (\mathrm{A} - \mathrm{B})\,(\mu^2 \mathrm{C} - 2\,\mathrm{E}_0) = 0 \, . \end{aligned}
$$

$$
(11.\mathrm{C}) \qquad \begin{aligned} & \mathrm{A} = \mathrm{B} \quad ; \quad \mu^2 \mathrm{B}' = 4\,\xi_1 c_3 \quad , \quad \mu^2 \mathrm{A}' = 4\,\xi_2 c_3 \, , \\ & 4\,c_3^2\,(2\xi_3 c_3 + 2\mathrm{E}_0) - \mu^2 (\mathrm{C} c_3^2 + \mathrm{A} a^2) = 0 \quad , \quad 4\,c_3^2 \mathrm{K}_c^2 = \mu^2 (\mathrm{A} a^2 - \mathrm{C} c_3^2)^2 . \end{aligned}
$$

I moti di queste classi sono completamente individuati qualora si tenga conto delle (3.1), (3.2) e dei valori che per ν fornisce la (4), e che risultano:

$$
(12.\mathrm{A}) \qquad \nu = \frac{-2\,\mathrm{C}\mu c_3}{\mathrm{A} c_1^2 + \mathrm{B} c_2^2 + \mathrm{C} c_3^2} \, ,
$$

$$
(12.\mathrm{B}) \qquad \nu = \frac{\mathrm{K}_c + \mathrm{A}'\mu c_2}{\mathrm{A} c_1^2 + \mathrm{B} c_2^2} \, ,
$$

$$
(12.\mathrm{C}) \qquad \nu = \frac{\mathrm{K}_c + \mathrm{B}'\mu c_1 + \mathrm{A}'\mu c_2 - \mathrm{C}\mu c_3}{\mathrm{A} a^2 + \mathrm{C} c_3^2 - 2\,\mathrm{A}' c_2 c_3 - 2\mathrm{B}' c_1 c_3} \, .
$$

2. Compatibilità con le equazioni di Eulero

Nel paragrafo precedente si sono determinate le classi di moti compatibili con gli integrali primi.

Rimane da riconoscere se questi moti sono anche soluzioni delle equazioni di Eulero.

Questo avviene per le rotazioni uniformi intorno alla verticale se e solo se questa appartiene al cono di Staude (2), e per le rotazioni uniformi intorno

(2) Cfr. [1], Cap. VIII, § 25.

ad un asse centrale di inerzia se e solo se il baricentro coincide con il punto fisso.

Per la classe A di precessioni semiregolari si ha dalla (12.A)

$$\dot{\nu} = \frac{4\,C\mu^2 c_1 c_2 c_3 (A - B)}{(Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2)^2} . \tag{13}$$

Le equazioni di Eulero hanno la forma

$$\dot{\nu} A c_1 + \nu^2 c_2 c_3 (C - B) + \mu\nu c_2 (A - B + C) + \xi_3 c_2 = 0 \tag{14.1}$$

$$\dot{\nu} B c_2 + \nu^2 c_1 c_3 (A - C) + \mu\nu c_1 (A - B - C) - \xi_3 c_1 = 0 \tag{14.2}$$

$$\dot{\nu} C c_3 - \nu^2 c_1 c_2 (B - A) = 0 . \tag{14.3}$$

Sostituendo a ν e $\dot{\nu}$ le loro espressioni date da (12.A) e (13), si vede che la (14.3) è soddisfatta, mentre le (14.1) e (14.2) lo sono se e solo se è

$$A = B ; \tag{15}$$

$$(A - C)\, c_3 \nu^2 - C\mu\nu - \xi_3 = 0 . \tag{16}$$

In questo caso però, dalla (12.A) si ottiene

$$\nu = \frac{-2\,C\mu c_3}{Aa^2 + Cc_3^2} = \text{costante} . \tag{12.A'}$$

Pertanto i moti dinamicamente possibili della classe A si restringono alle ben note precessioni regolari del giroscopio pesante [3].

Considerazioni del tutto analoghe mostrano che anche i moti delle classsi B e C non sono compatibili con le equazioni di Eulero se non si riducono a rotazioni uniformi o a precessioni regolari del giroscopio.

3. CONCLUSIONI

Si è riconosciuto che per il corpo rigido pesante con un punto fisso non esistono precessioni semiregolari in cui sia costante la velocità di rotazione propria e variabile la velocità di precessione. La ricerca di un tale tipo di precessioni semiregolari porta a rotazioni uniformi intorno alla verticale (rotazioni di Staude), o a precessioni regolari quando il corpo ha struttura giroscopica, o infine, a rotazioni uniformi intorno ad un asse centrale quando il baricentro coincide con il punto fisso.

(3) Cfr. [1], Cap. VIII, § 37.

Bibliografia

[1] Levi-Civita T. e Amaldi U., *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, parte II, Zanichelli (1927).

[2] Grioli G., *Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico*, « Annali Matematica pura ed applicata », s. IV, T. XXVI (1947).

[3] Grioli G., *Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico con un punto fisso e ricerca dei moti di precessione*, « Atti dell'Univ. di Ferrara », sezione VII, vol. III (1954).

[4] Bressan A., *Sulle precessioni di un corpo rigido costituenti moti di Hess*, « Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova », vol. XXVII (1957).

[5] Troilo R., *Caratterizzazione delle precessioni semiregolari con asse di precessione verticale*, « Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova », vol. XLVI (1971).