Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alexe Marinescu, Dan Dumitrescu

Sur rentrée optimale dans l'atmosphère planétaire avec un minimum de chaleur cédée à l'engin spatial

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.4, p. 584–590.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_584_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Astrodinamica. — *Sur l'entrée optimale dans l'atmosphère planétaire avec un minimum de chaleur cédée à l'engin spatial.* Nota di ALEXE MARINESCU e DAN DUMITRESCU, presentata (*) dal Socio C. FERRARI.

RIASSUNTO. — In questo lavoro si presenta lo studio del rientro nell'atmosfera planetaria col minimo di calore trasmesso al veicolo spaziale il quale sta effettuando la sua evoluzione. Il problema variazionale è formulato come un problema isoperimetrico avente un'estremità mobile del tipo già studiato dal primo Autore [1]. Secondo questo metodo si ottengono soluzioni analitiche le quali esprimono le leggi ottime di variazione dei parametri del movimento durante il rientro.

NOTATIONS

z	altitude;
x	distance sur l'axe horizontal;
ρ	densité;
S	surface de référence;
S_v	aire de la surface de l'engin;
V	vitesse de l'engin;
C_z	coefficient de portance;
C_x	coefficient de résistance à l'avancement;
C'_f	coefficient équivalent de frottement de la surface de l'engin;
θ	angle d'inclinaison de la trajectoire par rapport à l'axe horizontal local;
β	constante de définition de la densité en fonction de l'altitude;
g	accélération de la gravitation;
m	masse de l'engin;
$\frac{dq_m}{dt}$	flux moyen (quantité moyenne de chaleur transmise par unité de temps et unité de surface de l'engin).

Un problème particulièrement intéressant du point de vue pratique se pose par rapport à la réduction de la quantité totale de chaleur cédée aux engins spatiaux lors de l'entrée dans l'atmosphère.

La quantité totale de chaleur cédée à un engin spatial durant l'entrée dépend de nombreux facteurs, mais c'est la trajectoire de celui–ci qui en est la cause principale.

Le but du présent travail est d'établir la trajectoire optimale de l'engin spatial, de manière à rendre minime la quantité totale de chaleur qui lui est cédée.

Pour ce faire, il est tout d'abord nécessaire de connaître les équations de mouvement.

(*) Nella seduta del 14 aprile 1973.

En considérant le cas de l'entrée sur une trajectoire plane et en admettant que l'angle θ est positif à la descente et négatif à la montée, pour des petits angles ayant l'entrée et la portance différentes de zéro, le système complet d'équations qui régit le mouvement est:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{SC_x}{2m}\rho V^2 \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = -V\sin\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{SC_x}{2m}\rho V \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = V\cos\theta. \end{aligned}$$

En exprimant la quantité totale de chaleur cédée à l'engin par la relation

$$(2)\qquad Q = S_v \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{dq_m}{dt}\right) dt$$

puisque le flux moyen a l'expression

$$(3)\qquad \frac{dq_m}{dt} = \frac{C_f'}{4}\rho V^3$$

alors si C_f' peut être considéré comme approximativement constant, nous aurons

$$(4)\qquad Q = \frac{S_v C_f'}{4}\int_{t_i}^{t_f} \rho V^3\, dt\,.$$

On introduit la variable z, en sorte que les deux premières équations (1) deviennent

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= \frac{SC_x}{2m}\frac{\rho V}{\sin\theta} \\ \frac{d\theta}{dz} &= \frac{SC_z}{2m}\frac{\rho}{\sin\theta}\,. \end{aligned}$$

Étant donné que

$$(6)\qquad dt = -\frac{dz}{V\sin\theta}$$

et que de la première équation (5) en notant $\frac{dV}{dz} = V'$ et $\frac{SC_x}{2m} = a$ nous avons

$$(7)\qquad \sin\theta = a\frac{\rho V}{V'}\,.$$

En remplaçant (6) et (7) en (4), il résulte

$$(8)\qquad Q = \frac{S_v C_f'}{4a}\int_{z_f}^{z_i} VV'\, dz\,.$$

De la troisième et quatrième équation (1), on déduit:

$$dx = -\operatorname{ctg}\theta\, dz$$

dont on obtient – tel que nous l'avons montré dans [1] –

$$x = \int_{z_f}^{z_i} \left(\frac{1}{a\dfrac{\rho V}{V'}} - \frac{a}{2}\frac{\rho V}{V'} \right) dz \,. \tag{9}$$

Pour déterminer les lois optimales de variation des paramètres du mouvement, de manière à ce que l'engin spatial puisse parcourir la trajectoire d'entrée entre les altitudes z_i, z_f avec un minimum de chaleur cédée, la distance sur l'axe horizontal étant donnée ($x = l$), le problème variationnel qui se pose est en fait de trouver le minimum de l'intégrale (8), à condition que:

$$x = \int_{z_f}^{z_i} \left(\frac{1}{a\dfrac{\rho V}{V'}} - \frac{a}{2}\frac{\rho V}{V'} \right) dz = l \,. \tag{10}$$

Le problème variationnel est par conséquent un problème isopérimétrique à une extrémité mobile, parce que pour $z = z_i$ la vitesse $V = V_i$ est donnée sans être, toutefois, précisée pour $z = z_f$ (voir [1]). La courbe qui réalise l'extremum de l'intégrale (8) est une extrèmale de la fonctionnelle

$$J = \int_{z_f}^{z_i} H\, dz \tag{11}$$

où

$$H = VV' + \lambda \left(\frac{1}{a}\frac{V'}{\rho V} - \frac{a}{2}\frac{\rho V}{V'} \right) \tag{12}$$

λ étant une constante.

Puisque l'extrémale doit vérifier l'équation d'Euler

$$\frac{\partial H}{\partial V} - \frac{d}{dz}\frac{\partial H}{\partial V'} = 0 \tag{13}$$

dès lors, en tenant compte de l'expression (12) de la fonction H, l'équation d'Euler (13), mène à l'équation différentielle

$$V'' - \frac{\rho'}{2\rho} V' - \frac{V'^2}{V} + \frac{V'^3 \rho'}{a^2 \rho^3 V^2} = 0 \tag{14}$$

qui, à l'aide de la loi de variation exponentielle de la densité

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta z} \tag{15}$$

peut être écrite sous la forme

$$V'' + \frac{\beta}{2} V' - \frac{V'^2}{V} - \frac{V'^3 \beta e^{2\beta z}}{a^2 \rho_0^2 V^2} = 0 \,. \tag{16}$$

Au moyen de la substitution

$$V = e^{\int u\,dz}$$

l'équantion (16) devient

$$u' + \frac{\beta}{2} u - \beta \frac{u^3}{a^2 \rho_0^2} e^{2\beta z} = 0 \tag{17}$$

qui est une équation de type Bernoulli. Par la substitution

$$y = u^{-2}$$

l'équation (17) devient par transposition une équation linéaire

$$y' - \beta y + \frac{2\beta}{a^2 \rho_0^2} e^{2\beta z} = 0 . \tag{18}$$

En intégrant l'équation (18) et en tenant compte des substitutions accomplies, on obtient finalement la solution de l'équation (16)

$$V = C_2 e^{\int \frac{dz}{\sqrt{e^{\beta z}\left(C_1 - \frac{2}{a^2 \rho_0^2} e^{\beta z}\right)}}} \tag{19}$$

les deux constantes C_1 et C_2 pouvant être déterminées à condition que pour $z = z_i$, $V = V_i$ et de la condition isopérimétrique (10).

En notant avec $b = \frac{2}{a^2 \rho_0^2}$, en effectuant l'intégrale et remarquant que pour $z = z_i, V = V_i$, l'expression (19) devient

$$V = V_i e^{-\frac{2}{\beta C_1}\left(\sqrt{C_1 e^{-\beta z} - b} - \sqrt{C_1 e^{-\beta z_i} - b}\right)} . \tag{20}$$

Pour déterminer la deuxième constante C_1, en remplaçant dans la condition isopérimétrique (10) V'/V et en notant avec $\bar{C}_1 = C_1/b$ on obtient par suite des calculs l'équation transcendente

$$\frac{l\beta}{\sqrt{2}} = -2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\bar{C}_1 e^{-\beta z_f} - 1} - \sqrt{\bar{C}_1 e^{-\beta z_i} - 1}}{1 + \sqrt{\bar{C}_1 e^{-\beta z_f} - 1}\sqrt{\bar{C}_1 e^{-\beta z_i} - 1}} + \tag{21}$$

$$+ \sqrt{\bar{C}_1 e^{-\beta z_f} - 1} - \sqrt{\bar{C}_1 e^{-\beta z_i} - 1}$$

qui peut être résolue numériquement sans autres difficultés.

En ce qui concerne la nature de l'extremum, compte tenu de la condition de transversalité à l'extrémité mobile

$$\left[\frac{\partial H}{\partial V'}\right]_{z=z_f} = 0 \tag{22}$$

on peut facilement déduire que $\lambda < 0$ puisque de (20) on constate que la vitesse est décroissante en rapport avec la décroissance de l'altitude et que par conséquent $V' > 0$.

Avec $\lambda < 0$ et $V' > 0$, la condition du minimum faible de Legendre et la condition du minimum fort de Weierstrass sont satisfaites, ce qui démontre que l'intégrale (8) est véritablement minime le long de l'extrémale en vertu de (11).

Une fois la loi optimale de variation de la vitesse connue, tel qu'on vient de le voir, il reste à déduire la loi optimale de variation de l'angle θ d'inclinaison de la trajectorie par rapport à l'axe horizontal.

Pour des engins de forme connue, ayant C_z/C_x donné dans des limites bien précisées, la loi de variation de l'angle θ qui s'identifie par ailleurs à la loi optimale de la grande majorité des cas qui apparaissent dans la pratique, peut se déduire comme tel:

En divisant les équations (5), nous aurons

$$d\theta = \frac{C_z}{C_x} \frac{dV}{V} . \tag{23}$$

Avec l'angle initial et la vitesse initiale données, autrement dit avec les conditions $\theta = \theta_i$, $V = V_i$ par intégration peut être obtenu de (23)

$$\theta = \frac{C_z}{C_x} \ln \frac{V}{V_i} + \theta_i . \tag{24}$$

La loi optimale de variation de la vitesse étant connue, pour déterminer la valeur optimale du rapport C_z/C_x sur l'arc de la trajectoire, il faut employer la condition isopérimétrique

$$\int_{z_f}^{z_i} \operatorname{ctg} \theta \, dz = l$$

qui doit être satisfaite pareillement par l'angle θ donné dans (24). Par remplacement, on obtient l'équation qui donne un rapport C_z/C_x de la forme

$$\int_{z_f}^{z_i} \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{C_z}{C_x} \ln \frac{V}{V_i} \operatorname{tg} \theta_i}{\operatorname{tg} \frac{C_z}{C_x} \ln \frac{V}{V_i} + \operatorname{tg} \theta_i} dz = l \tag{25}$$

qui peut être résolu numériquement.

Les calculs numériques ont prouvé plus que suffisamment que pour des valeurs du rapport C_z/C_x qui s'encadrent dans la gamme des valeurs admises dans la pratique, la variation de l'angle θ donnée par (24) fait passer l'arc de la trajectoire optimale à $z = z_f$ par $x = l$.

De la sorte, la loi de variation de l'angle θ donnée par (24), coïncide à la loi optimale. Ayant de la même manière aussi la loi optimale de variation de l'angle θ, les arc de la trajectoire optimale peuvent être calculés en intégrant par la méthode Runge–Kutta l'équation

$$\frac{dx}{dz} = - \operatorname{ctg} \theta . \tag{26}$$

A titre d'application, en partant des données suivantes:

$z_i = 110.000$ m, $z_f = 40.000$ m, $l = 2.000.000$ m, $\rho_0 = 0{,}125$ kg sec^2/m^4, $\beta = 1{,}395 \cdot 10^{-4}$ m^{-1}, $V_i = 7.800$ m/sec, $\theta_i = 1^0$

on a calculé pour plusieurs valeurs du paramètre $a = SC_x/2\,m$ la vitesse pour l'entrée optimale avec minimum de chaleur cédée à l'engin spatial, les résultats

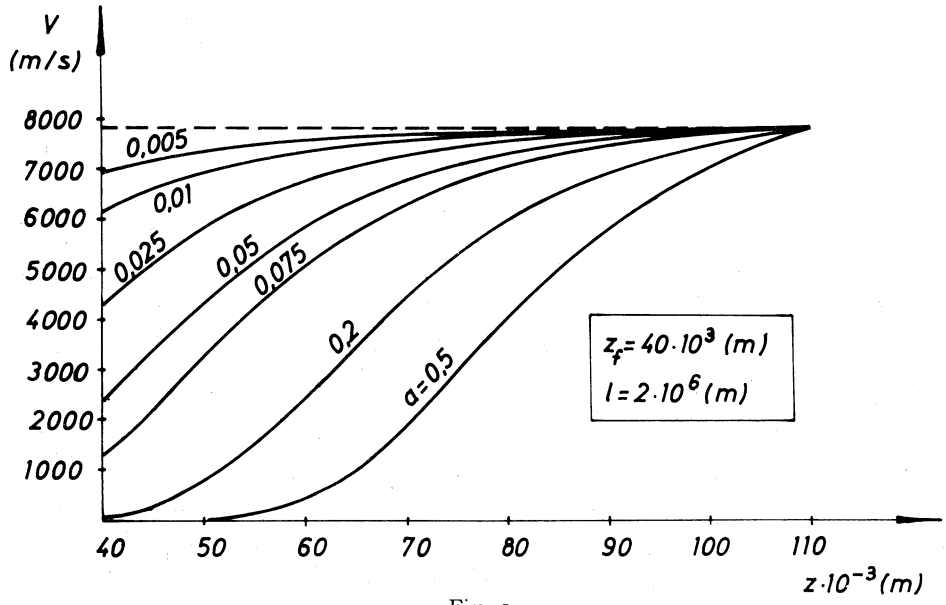

Fig. 1.

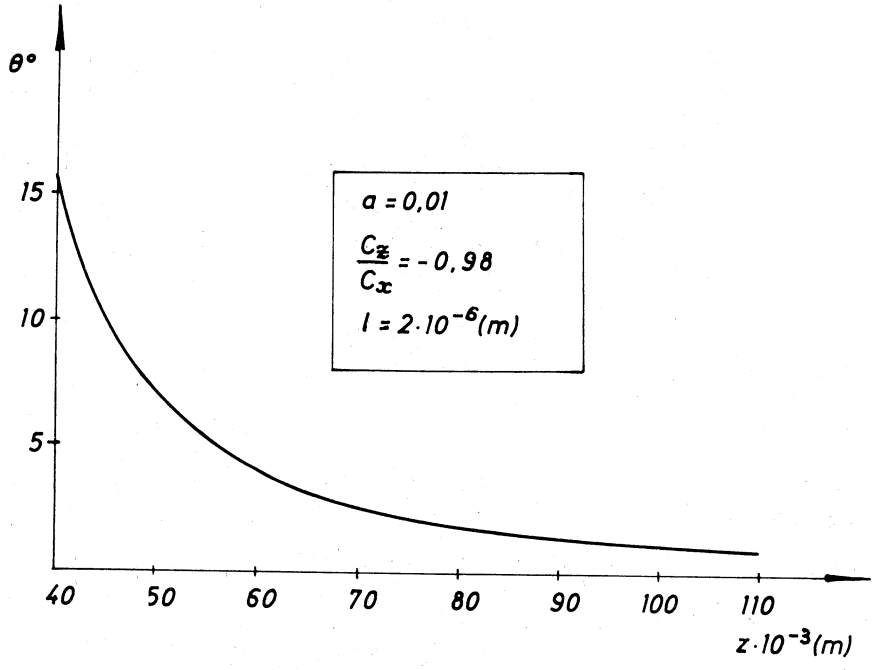

Fig. 2.

étant inscrits dans l'annexe graphique (la fig. 1). A partir de la variation optimale de la vitesse ainsi obtenue, on a calculé la variation de l'angle θ et les arcs de la trajectoire optimale, dont on donne (dans les graphiques des

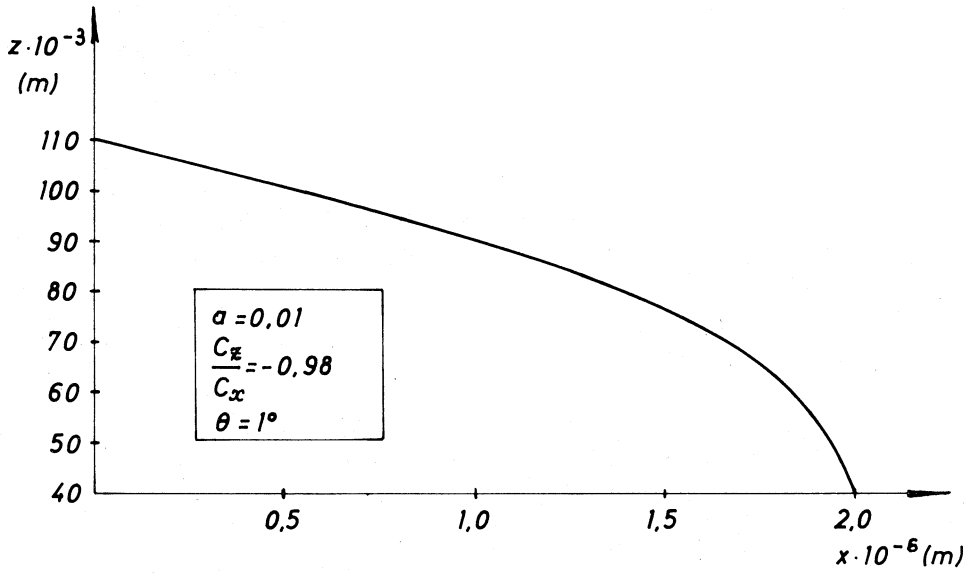

Fig. 3.

figg. 2 et 3), afin d'en avoir une idée, la variation de l'angle θ et respectivement l'arc de la trajectoire optimale pour $a = 0{,}01$, la valeur correspondante du rapport C_z/C_x étant $C_z/C_x = -0{,}98$.

Bibliographie

[1] Al. Marinescu, *Sur l'optimisation de l'entrée des engins spatiaux dans l'atmosphère planétaire*, « Rendiconti Accad. Naz. dei Lincei », *51* (5), Novembre 1971.

[2] W. H. T. Loh, *Re-entry and Planetary Entry*, « Physics and Technology », Springer Verlag, New-York Inc., 1968.