
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ALBERTO DEL FRA, GIULIANO ROMANI

Conessioni e curvature nel fibrato $ISO(E,F)$. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 54 (1973), n.4, p. 570–576.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_570_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria differenziale. — *Connessioni e curvature nel fibrato* $\text{ISO}(E, F)$ (*). Nota I di ALBERTO DEL FRA e GIULIANO ROMANI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — N. Teleman's generalized connections in the fiber bundle $\text{ISO}(E, F)$ are studied. Some relations between these connections and infinitesimal connections in the principal bundles associated with the vector bundles E, F , are obtained. Geometric interpretation of the curvature of a generalized connection is given.

INTRODUZIONE

In due recenti Note [4] N. Teleman ha introdotto nozioni di connessione ∇ , e di curvatura Ω , generalizzanti quelle classiche. ∇ è presentata come spezzamento di una successione esatta corta di algebre di Lie; Ω è definita formalmente a partire da ∇ . Nel presente lavoro studiamo le suddette connessioni generalizzate in casi di particolare interesse geometrico.

Assegnati due fibrati vettoriali E, F di egual dimensione sopra una stessa varietà differenziabile M , consideriamo il fibrato $\text{ISO}(E, F)$ che ha per fibra su $x \in M$ gli isomorfismi di E_x su F_x . Nei §§ 4, 5 mostriamo che nel fibrato $\text{ISO}(E, F)$ una connessione generalizzata può interpretarsi in modo geometrico semplice in relazione ad opportune connessioni infinitesimali ordinarie nei fibrati principali associati ad E, F .

Stabiliamo inoltre che tramite ∇ si può definire una nozione di « trasporto parallelo » di un isomorfismo di $\text{ISO}(E, F)$ (n. 5.5).

Successivamente (§ 6) studiamo la curvatura Ω associata a ∇ , precisando il legame geometrico tra Ω e le curvature delle connessioni infinitesimali suddette, stabilendo altresì per Ω una interpretazione relativa ad un trasporto lungo un circuito infinitesimo (n. 6.2).

I. PRELIMINARI

I.1. Richiamiamo qui la nozione di connessione generalizzata di N. Teleman ([4], Nota I) in una forma limitata, comprensiva dei casi appresso studiati.

Sia M una varietà differenziabile reale paracompatta di dimensione r di classe C^∞ (1), e $T(M)$ il suo fibrato tangente. Con $\mathcal{L}(T)$ denoteremo l'algebra di Lie dei campi tangenti ad M (sezione del fibrato $T(M) \rightarrow M$).

(*) Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni. (La ricerca è stata svolta in collaborazione dai due Autori; G. Romani ha trattato particolarmente gli argomenti dei §§ 2, 3, 5 e A. Del Fra quelli dei §§ 4, 6).

(**) Nella seduta del 14 aprile 1973.

(1) Tutti gli oggetti geometrici che considereremo saranno supposti tacitamente di classe C^∞ .

Sia P una $\mathbf{R}$ -algebra di Lie, dotata come $\Gamma(T)$, di struttura di $\mathfrak{F}(M)$ -modulo ($\mathfrak{F}(M)$ algebra delle funzioni reali su M), che induca quella di $\mathbf{R}$ -modulo che P già possiede. Supponiamo che P sia ottenuta con una estensione di $\Gamma(T)$, cioè esista un $\mathfrak{F}(M)$ -morfismo di moduli, ed $\mathbf{R}$ -morfismo di algebre di Lie, di P su $\Gamma(T)$, $\pi: P \rightarrow \Gamma(T)$.

1.1.1. DEFINIZIONE. *Una connessione generalizzata nell'estensione predetta è un morfismo di $\mathfrak{F}(M)$ -moduli (non necessariamente di algebre di Lie) $\nabla: \Gamma(T) \rightarrow P$, inverso destro di π .*

1.2. Siano $E \xrightarrow{p} M$, $F \xrightarrow{q} M$ due fibrati vettoriali reali o complessi n -dimensionali su M . Supporremo nel seguito che E ed F siano costruiti, com'è sempre lecito, a partire dalla stessa famiglia di aperti di M : $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ che banalizzano E ed F , essendo $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante che rappresenta M . Indicheremo con $g_{\beta\alpha}$ le funzioni di collegamento di E e con $h_{\beta\alpha}$ quelle di F .

Consideriamo il fibrato $\tilde{\pi}: \text{ISO}(E, F) \rightarrow M$, che ha per fibra su ogni $x \in M$ la varietà $\text{ISO}(E_x, F_x)$ degli isomorfismi di E_x su F_x .

Fissato un aperto U_α , per ogni $x \in U_\alpha$ le fibre E_x ed F_x si rappresentano biunivocamente in modo determinato su $\mathbf{K}^n$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$), in base alla predetta banalizzazione locale. Corrispondentemente $\text{ISO}(E_x, F_x)$ si rappresenta sul gruppo lineare $\text{GL}(n, \mathbf{K})$ e le restrizioni $\text{ISO}(E, F)|_{U_\alpha}$ si rappresentano su $U_\alpha \times \text{GL}(n, \mathbf{K})$ con un isomorfismo determinato che, per brevità, diremo *isomorfismo locale*.

Si vede facilmente che il fibrato $\text{ISO}(E, F)$ può allora anche pensarsi costruito a partire dagli isomorfismi locali $\text{ISO}(E, F)|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \text{GL}(n, \mathbf{K})$. Precisamente

$$\text{ISO}(E, F) = \dot{\sqcup} (U_\alpha \times \text{GL}(n, \mathbf{K})) / \sim$$

dove $\dot{\sqcup}$ indica l'unione disgiunta e l'equivalenza $\sim$ è definita ponendo per $(x, g) \in U_\alpha \times \text{GL}(n, \mathbf{K})$, $(x, h) \in U_\beta \times \text{GL}(n, \mathbf{K})$:

$$(x, g) \sim (x, h) \iff h = h_{\beta\alpha}(x) g g_{\beta\alpha}^{-1}(x).$$

Se E è il fibrato banale su M : $E \cong M \times \mathbf{K}^n = \mathbf{1}_n$, $\text{ISO}(E, F)$ non è altro che il fibrato principale associato ad F , $\tilde{\pi}_d: \tilde{F}_d = \text{ISO}(\mathbf{1}_n, F) \rightarrow M$. In questo caso è definita un'azione a *destra* di $\text{GL}(n, \mathbf{K})$ su $\tilde{F}_d$. Tramite tale azione a destra è possibile dare la nozione di *campo invariante a destra* di $\tilde{F}_d$. Denoteremo con $\mathfrak{X}_d(\tilde{F}_d)$ l'algebra di Lie dei campi tangenti ad $\tilde{F}_d$ invarianti a destra.

Analogamente se $F = \mathbf{1}_n$, nel fibrato $\tilde{\pi}_s: \tilde{E}_s = \text{ISO}(E, \mathbf{1}_n) \rightarrow M$ è definita un'azione a *sinistra* di $\text{GL}(n, \mathbf{K})$ e rimane individuata l'algebra di Lie dei *campi tangenti invarianti a sinistra* $\mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s)$.

Se E, F sono fibrati arbitrari non è definibile un'azione globale di $\text{GL}(n, \mathbf{K})$ né a destra né a sinistra. Tuttavia si presenta la circostanza seguente. Fissato U_α , e quindi l'isomorfismo locale $\text{ISO}(E, F)|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \text{GL}(n, \mathbf{K})$, in corrispondenza alle traslazioni destre e sinistre di

$GL(n, \mathbf{K})$ resta definita sia un'azione a destra che un'azione a sinistra del gruppo $GL(n, \mathbf{K})$. Su tale restrizione del fibrato ha dunque senso parlare di campi tangenti invarianti a destra e di campi tangenti invarianti a sinistra. Dati però due aperti U_α, U_β non disgiunti, se sopra $U_\alpha \cap U_\beta$ è definito un campo invariante a destra rispetto ad U_α , lo stesso campo, considerato rispetto ad U_β , si dimostra essere somma di un campo invariante a destra e di uno invariante a sinistra. Analogamente avviene considerando sopra U_α un campo invariante a sinistra.

Si è così portati a considerare, per ogni U_α , campi somma di uno invariante a destra e di uno invariante a sinistra, in quanto si dimostra che tale carattere risulta *indipendente dall'aperto considerato* (e cioè dal corrispondente isomorfismo locale).

Un campo definito su $ISO(E, F)$ che, per ogni U_α , possa considerarsi come somma di un campo invariante a destra e di un campo invariante a sinistra, lo diremo *campo invariante misto*.

Si può verificare che la parentesi di Poisson di due campi invarianti misti è ancora un campo invariante misto; quindi si può parlare dell'algebra di Lie dei campi invarianti misti: $\mathfrak{X}_m(ISO(E, F))$ ⁽²⁾.

Studieremo le connessioni definite in 1.1. limitatamente ai casi in cui sia $P = \mathfrak{X}_d, \mathfrak{X}_s, \mathfrak{X}_m$.

2. CONNESSIONI GENERALIZZATE IN $ISO(\mathbf{1}_n, F)$ E IN $ISO(E, \mathbf{1}_n)$

2.1. Com'è noto una connessione infinitesimale ∇_d in $\tilde{\pi}_d: \tilde{F}_d \rightarrow M$ consiste nell'assegnazione di una *distribuzione invariante a destra* soddisfacente alle proprietà seguenti. Detto $D_d(u)$ lo spazio della distribuzione tangente in $u \in \tilde{F}_d$:

i) $D_d(u)$ dipenda differenzialmente da u ;

ii) $(\tilde{\pi}_d)_*|_{D_d(u)}: D_d(u) \rightarrow T_{\tilde{\pi}_d(u)}M$ sia un isomorfismo.

Nella ii) con $(\tilde{\pi}_d)_*$ si è indicato il differenziale di $\tilde{\pi}_d$.

La connessione ∇_d permette di «sollevare» un campo $X \in \Gamma(T)$ in un campo $\nabla_d(X) \in \mathfrak{X}_d(\tilde{F}_d)$. Si stabilisce così una corrispondenza, che denoteremo ancora con $\nabla_d: \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{X}_d(\tilde{F}_d)$, che è chiaramente un morfismo di $\mathfrak{F}(M)$ -moduli inverso destro di $\pi_d: \mathfrak{X}_d(\tilde{F}_d) \rightarrow \Gamma(T)$ (π_d morfismo indotto in $\mathfrak{X}_d(\tilde{F}_d)$ da $(\tilde{\pi}_d)_*$).

Appare così che *le connessioni infinitesimali rientrano in quelle generalizzate definite nella I.I.I.*

Non è difficile verificare che per $P = \mathfrak{X}_d(\tilde{F}_d)$ ogni connessione generalizzata individua una ben determinata connessione infinitesimale, ovverosia una distribuzione invariante a destra soddisfacente alle i), ii).

(2) Cfr. [4], Nota II.

2.2. Per un fissato aperto $U \in \mathbb{I}$ si consideri l'isomorfismo locale $\pi_d^{-1}(U) \cong U \times GL(n, \mathbf{K})$, che, per comodità di simboli, penseremo come identificazione. Il fibrato tangente $T(\tilde{\pi}_d^{-1}(U))$ risulta allora isomorfo al fibrato banale su $U \times GL(n, \mathbf{K})$ con fibra $\mathbf{R}^r \oplus gl(n, \mathbf{K})$ ($gl(n, \mathbf{K})$ algebra di Lie di $GL(n, \mathbf{K})$). Se $(x, g) \in U \times GL(n, \mathbf{K})$, identificheremo lo spazio tangente in (x, g) a $T_x(U) \oplus gl(n, \mathbf{K})$.

Sia $\sigma: U \rightarrow U \times GL(n, \mathbf{K})$ la *sezione unitaria* definita da $\sigma(x) = (x, e)$ con e matrice unità di $GL(n, \mathbf{K})$. Un campo Y invariante a destra su $\tilde{\pi}_d^{-1}(U)$ rimane individuato dai valori assunti su $\sigma(x)$. Precisamente denotato con $Y(x, g) = (X(x), A(x, g)) \in T_x U \oplus gl(n, \mathbf{K})$ il valore di Y in $(x, g) \in U \times GL(n, \mathbf{K})$, si ha: $Y(x, g) = (X(x), A(x, e)g)$, dove si denota con la moltiplicazione *a destra* per g la trasformazione che subisce $A(x, e) \in gl(n, \mathbf{K})$ operando con il differenziale della traslazione destra definita da g in $GL(n, \mathbf{K})$. Per $Y = \nabla_d X|_U$ potremo allora scrivere:

$$2.2.1 \quad \nabla_d X(x, g) = (X(x), \Gamma(X(x), x)g) \quad , \quad \Gamma(X(x), x) \in gl(n, \mathbf{K})$$

ovvero con simbolismo compatto

$$2.2.2 \quad \nabla_d X = (X, \Gamma X) .$$

2.3. Nel caso del fibrato $\tilde{\pi}_s: \tilde{E}_s \rightarrow M$, non è classicamente definita una nozione di connessione. È però immediato verificare che un morfismo di $\mathfrak{F}(M)$ -moduli $\nabla_s: \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s)$ inverso destro di $\pi_s: \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s) \rightarrow \Gamma(T)$ (π_s morfismo indotto dal differenziale $(\tilde{\pi}_s)_*$ di $\tilde{\pi}_s$), ovvero sia una connessione generalizzata, equivale alla assegnazione di una *distribuzione invariante a sinistra su $\tilde{E}_s$ verificante i), ii) del n. 2.1.*

Vedremo in seguito come possa interpretarsi geometricamente una connessione generalizzata del tipo ∇_s .

Anche ora, in analogia a quanto visto nel n. 2.2, fissato un aperto $U \in \mathbb{I}$, possiamo dire che un campo Y invariante a sinistra su $\tilde{\pi}_s^{-1}(U)$ rimane individuato dai valori assunti su $\sigma(x)$ in quanto risulta $Y(x, g) = (X(x), B(x, g)) = (X(x), gB(x, e)) \in T_x(U) \oplus gl(n, \mathbf{K})$, dove la moltiplicazione *a sinistra* per g della matrice $B(x, e) \in gl(n, \mathbf{K})$ denota il differenziale della traslazione sinistra definita da g in $GL(n, \mathbf{K})$. Per $Y = \nabla_s X|_U$ avremo allora:

$$2.3.1 \quad \nabla_s X(x, g) = (X(x), g\Lambda(X(x), x)) \quad \Lambda(X(x), x) \in gl(n, \mathbf{K})$$

ovvero anche, compattamente:

$$2.3.2 \quad \nabla_s X = (X, \Lambda X) .$$

Osservazione. — Sia $\Gamma(X(x), x)$ nella 2.2.2, sia $\Lambda(X(x), x)$ nella 2.3.1 sono, per x fissato, matrici funzioni lineari di $X(x)$, essendo ∇_d, ∇_s morfismi di spazi vettoriali (cfr. 1.1.1).

3. CONNESSIONI GENERALIZZATE IN $\text{ISO}(E, F)$

3.1. Siano ora $E \rightarrow M$ ed $F \rightarrow M$ i due fibrati di cui al n. 1.2.

Il differenziale $\tilde{\pi}_*: T(\text{ISO}(E, F)) \rightarrow T(M)$ di $\tilde{\pi}: \text{ISO}(E, F) \rightarrow M$ individua un morfismo di algebre di Lie $\pi: \mathfrak{X}_m(\text{ISO}(E, F)) \rightarrow \Gamma(T)$. Una *connessione generalizzata in $\text{ISO}(E, F)$* è un morfismo di $\mathfrak{F}(M)$ -moduli $\nabla: \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{X}_m$ inverso destro di π . Vedremo in seguito quale interpretazione geometrica abbia una tal connessione ∇ e come si leghi ai due precedenti tipi di connessioni ∇_d e ∇_s .

3.2. Anche nel caso attuale, per una carta (U, φ) assegnata, resta determinato l'isomorfismo $\tilde{\pi}^{-1}(U) \cong U \times \text{GL}(n, \mathbf{K})$ e lo spazio tangente in (x, g) è isomorfo a $T_x(U) \oplus \text{gl}(n, \mathbf{K})$. Un campo Y invariante misto su $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ si potrà allora scrivere nella forma (previe le solite identificazioni):

$$3.2.1 \quad Y(x, g) = (X(x), A(x, e)g + gB(x, e))$$

dato che, per definizione, Y è somma di un campo invariante a destra e di un campo invariante a sinistra.

La 3.2.1 mostra che anche Y rimane individuato dai valori assunti sulla sezione unitaria $\sigma(x)$. Si osservi però che (pur essendo fissati gli isomorfismi di cui sopra e quindi la sezione unitaria) i vettori $A(x, e)$ e $B(x, e)$ non sono individuati dal campo Y . Di fatto si verifica immediatamente che, per ogni Y , si ha anche

$$Y(x, g) = (X(x), \tilde{A}(x, e)g + g\tilde{B}(x, e))$$

se e soltanto se in ogni punto $x \in U$ si ha: $\tilde{A} = A + H$, $\tilde{B} = B - H$, con H elemento del centro di $\text{gl}(n, \mathbf{K})$.

Per $Y = \nabla X|_U$ potremo scrivere

$$3.2.2 \quad \nabla X(x, g) = (X(x), \Gamma(X(x), x)g + g\Lambda(X(x), x)), \\ \Gamma(X(x), x), \Lambda(X(x), x) \in \text{gl}(n, \mathbf{K})$$

o più semplicemente

$$3.2.3 \quad \nabla X = (X, \Gamma X + \Lambda X).$$

4. COLLEGAMENTO TRA LE CONNESSIONI $\nabla, \nabla_d, \nabla_s$.

4.1. Sia $\tilde{E}_s \times_M \tilde{F}_d$ il prodotto fibrato di $\tilde{E}_s, \tilde{F}_d$ su M . Si denoti con $\Theta: \tilde{E}_s \times_M \tilde{F}_d \rightarrow \text{ISO}(E, F)$ l'applicazione canonica ottenuta sulla fibra su $x \in M$ componendo un isomorfismo di $E_x \rightarrow \mathbf{K}^n$ con un isomorfismo di $\mathbf{K}^n \rightarrow F_x$.

Localmente, sopra l'aperto U , $\tilde{E}_s \times_M \tilde{F}_d$ si può rappresentare (attraverso le identificazioni fatte in $\tilde{E}_s, \tilde{F}_d$) con $U \times \text{GL}(n, \mathbf{K}) \times \text{GL}(n, \mathbf{K})$ e la applicazione Θ viene espressa al modo seguente:

$$4.1.1 \quad \Theta(x, b, a) = (x, ab) \quad x \in U; \quad b, a \in \text{GL}(n, \mathbf{K}).$$

Differenziando Θ si ottiene:

$$\Theta_* : T(\tilde{E}_s \times_M \tilde{F}_d) \rightarrow T(\text{ISO}(E, F)).$$

Se (X, B, A) è un vettore tangente ad $U \times GL(n, \mathbf{K}) \times GL(n, \mathbf{K})$ nel punto (x, b, a) allora

$$4.1.2 \quad \Theta_*(X, B, A) = (X, Ab + aB).$$

Un vettore tangente a $\tilde{E}_s \times_M \tilde{F}_d$ nel punto $(h, k) \in \tilde{E}_{s,x} \times \tilde{F}_{d,x} \subset \tilde{E}_s \times_M \tilde{F}_d$, si può identificare con una coppia di vettori tangenti $A \in T_h(\tilde{E}_s)$, $B \in T_k(\tilde{F}_d)$ tali che

$$4.1.3 \quad (\tilde{\pi}_s)_* A = (\tilde{\pi}_d)_* B.$$

Viceversa una tale coppia di vettori individua un vettore tangente ad $\tilde{E}_s \times_M \tilde{F}_d$.

Da ciò segue che due campi tangenti $\bar{B} \in \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s)$, $\bar{A} \in \mathfrak{X}_d(\tilde{F}_d)$ verificanti per ogni coppia di punti $h \in \tilde{E}_{s,x}$, $k \in \tilde{F}_{d,x}$ la 4.1.3, definiscono un campo tangente (che denoteremo con $\bar{B} \oplus_M \bar{A}$) a $\tilde{E}_s \times_M \tilde{F}_d$. L'insieme delle coppie $\bar{B}, \bar{A}$ con la suddetta proprietà sarà denotato $\mathfrak{X}_s \oplus_M \mathfrak{X}_d$. Passando di nuovo alle considerazioni locali, deduciamo dalla 4.1.2 che $\Theta_*(\bar{B} \oplus_M \bar{A})|_U$ è un campo invariante misto su $\text{ISO}(E, F)|_U$. Infatti i campi $\bar{A}, \bar{B}$ si possono descrivere localmente

$$\bar{B}(x, b) = (X(x), bB(x))$$

$$\bar{A}(x, a) = (X(x), A(x)a)$$

dove X è un campo tangente su U e $A, B : U \rightarrow gl(n, \mathbf{K})$, e quindi

$$\Theta_*(\bar{B}(x, b) \oplus_M \bar{A}(x, a)) = (X(x), A(x)ab + abB(x)).$$

Concludiamo dunque che Θ_* induce un morfismo

$$\chi_M : \mathfrak{X}_s \oplus_M \mathfrak{X}_d \rightarrow \mathfrak{X}_m,$$

che risulta di $\mathfrak{F}(M)$ -moduli. Considerazioni locali mostrano che χ_U per ogni $U \in \mathcal{U}$ è un epimorfismo. Poiché M è paracompatto si ottiene che χ_M è un epimorfismo.

Si può osservare inoltre che relativamente ad ogni $U \in \mathcal{U}$, $\mathfrak{X}_s, \mathfrak{X}_d, \mathfrak{X}_s \oplus_U \mathfrak{X}_d, \mathfrak{X}_m$ risultano $\mathfrak{F}(U)$ -moduli *liberi* di dimensione finita. Con l'ipotesi di paracompattatezza della base M , si può provare che tutti gli $\mathfrak{F}(M)$ -moduli $\mathfrak{X}_s, \mathfrak{X}_d, \mathfrak{X}_s \oplus_M \mathfrak{X}_d, \mathfrak{X}_m$ sono *proiettivi*. In particolare risulta l'esistenza di un $\mathfrak{F}(M)$ -morfismo inverso destro di χ_M ⁽³⁾:

$$\omega : \mathfrak{X}_m \rightarrow \mathfrak{X}_s \oplus_M \mathfrak{X}_d.$$

Siano $\nabla_s : \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s)$, $\nabla_d : \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{X}_d(\tilde{F}_d)$ due connessioni generalizzate. Osserviamo che per ogni campo $X \in \Gamma(T)$, la coppia $(\nabla_s X, \nabla_d X)$

(3) Cfr. [3], Cap. I, n. 6.

appartiene a $\mathfrak{X}_s \oplus_{\mathbf{M}} \mathfrak{X}_d$ e dunque definisce in una maniera canonica una connessione generalizzata ∇ in $\text{ISO}(E, F)$, definita dalla composizione

$$\nabla: \Gamma(T) \xrightarrow{\nabla_s \oplus \nabla_d} \mathfrak{X}_s \oplus_{\mathbf{M}} \mathfrak{X}_d \xrightarrow{\Theta_*} \mathfrak{X}_m.$$

Siamo adesso in grado di concludere con il seguente

4.1.4. **TEOREMA.** - *Ogni coppia di connessioni ∇_s, ∇_d in $\tilde{E}_s, \tilde{F}_d$ individua in modo canonico una connessione ∇ in $\text{ISO}(E, F)$. Viceversa, per ogni connessione ∇ in $\text{ISO}(E, F)$ esiste (almeno) una coppia di connessioni generalizzate ∇_s, ∇_d in $\tilde{E}_s, \tilde{F}_d$ che inducono canonicamente ∇ .*

Rimane da dimostrare la seconda parte del teorema.

Assegnata infatti una connessione $\nabla: \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{X}_m$, per ogni $X \in \Gamma(T)$ il campo $\omega \nabla X \in \mathfrak{X}_s \oplus_{\mathbf{M}} \mathfrak{X}_d$ si spezza univocamente, come precedentemente mostrato, in una coppia di campi, che denoteremo con $\nabla_s X, \nabla_d X$ ($\nabla_s X \in \mathfrak{X}_s(\tilde{E}_s)$, $\nabla_d X \in \mathfrak{X}_d(\tilde{F}_d)$). Le corrispondenze

$$X \mapsto \nabla_s X$$

$$X \mapsto \nabla_d X$$

sono le richieste connessioni.

Osservazione. - Due coppie distinte di connessioni $(\nabla_s, \nabla_d), (\nabla'_s, \nabla'_d)$ possono individuare la stessa connessione ∇ in quanto il morfismo ω non è unico. Localmente si può arrivare alla stessa conclusione scegliendo $(\nabla_s, \nabla_d), (\nabla'_s, \nabla'_d)$ al modo seguente:

$$\nabla_s X(x, g) = (X(x), g\Lambda(X(x), x)),$$

$$\nabla_d X(x, g) = (X(x), \Gamma(X(x), x)g),$$

$$\nabla'_s X(x, g) = (X(x), g(\Lambda(X(x), x) + H(x))),$$

$$\nabla'_d X(x, g) = (X(x), (\Gamma(X(x), x) - H(x))g)$$

con $H(x)$ elemento del centro di $gl(n, \mathbf{K})$. Infatti, ambedue le coppie definiscono la stessa connessione ∇ :

$$4.3.5 \quad \nabla X(x, g) = (X(x), \Gamma(X(x), x)g + g\Lambda(X(x), x)).$$

Porremo perciò (4) $\nabla = \nabla_s \# \nabla_d = \nabla'_s \# \nabla'_d$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. KOBAYASHI e K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Vol. I, Interscience Publishers (1969).
- [2] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ediz. Cremonese, Roma 1962.
- [3] S. MACLANE, *Homology*, Springer Verlag (1963).
- [4] N. TELEMAN, *A characteristic ring of a Lie algebra extension*, Note I e II, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (8) 52, 498-506 e 708-711 (1972).

(4) Il simbolo $\#$ è adoperato in [4] Nota II, con significato analogo.