Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Sur un lemme de convergence et ses applications aux équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires et non monotones. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **54** (1973), n.4, p. 511–518.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1973_8_54_4_511_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1973.

Analisi matematica. — *Sur un lemme de convergence et ses applications aux équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires et non monotones.* Nota II di MARCO BIROLI [(*)], presentata [(**)] dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dimostrano il Lemma 2 ed i Teoremi 1 e 2 enunciati nella Nota I.

§ 2. DÉMONSTRATION DU LEMME 2

Démontrons, d'abord, que $\{\sigma_n(x)\}$ est bornée dans $\mathfrak{L}^1(\Omega)$.

Indiquons par E_k l'ensemble où $|\sigma_n(x)| \leq K$; on a

$$(2,1) \qquad \int_\Omega |\sigma_n(x)|\, dx \leq \int_{E_k} |\sigma_n(x)|\, dx + \int_{\Omega - E_k} |\sigma_n(x)|\, dx$$

$$\leq K \text{ mis } \Omega + \int_{\Omega - E_k} |\sigma_n(x)|\, dx\,.$$

De la définition de $g_n(\eta)$ on a que il y a n_ε tel que pour $n \geq n_\varepsilon$, $|\eta| \geq K$, $g_n(\eta)\,\eta \geq 0$.

On a alors

$$(2,2) \qquad \int_\Omega |\sigma_n(x)|\, dx \leq K \text{ mis } \Omega + \frac{1}{K}\int_\Omega \sigma_n(x)\, v_n(x)\, dx \leq \text{Cst.}$$

Démontrons maintenant que

$$(2,3) \qquad \lim_{\text{mes}(E)\to 0} \int_E |\sigma_n(x)|\, dx = 0$$

$(E \subset \Omega)$ uniformément pour n.

Indiquons par E_N l'ensemble $\{x \mid x \in E\,,\, v_n(x) \geq N\}$, $N > 1$.

On a

$$(2,4) \qquad \int_E |\sigma_n(x)|\, dx = \int_{E - E_N} |\sigma_n(x)|\, dx + \int_{E_N} |\sigma_n(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \text{Cst. mes } E + \frac{1}{N}\int_\Omega \sigma_n(x)\, v_n(x)\, dx \leq \text{Cst}\left(\text{mes } E + \frac{1}{N}\right)$$

dont, étant N arbitraire, on a le résultat.

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Parma. Istituto di Matematica del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1973.

De (2,2), (2,3), pour le théorème de Dunford–Pettis, on peut supposer

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} \sigma_n(x) = \sigma(x) \tag{2,5}$$

dans $\mathfrak{L}^1(\Omega)$.

Démontrons maintenant que, $\forall \varepsilon > 0$, $\eta \in \mathbf{R}$, il y a $\delta(\varepsilon, \eta)$ et $n(\varepsilon, \eta)$ tels que, $\forall \xi \in [\eta - \delta(\varepsilon, \eta), \eta + \delta(\varepsilon, \eta)]$ et $n \geq n(\varepsilon, \eta)$, $g_n(\xi)$ est dans le voisinage de $\beta(\eta)$ $[\beta_m(\xi) - \varepsilon, \beta_M(\xi) + \varepsilon]$, où $\beta_m(\xi)$ $(\beta_M(\xi))$ est l'extrémité inférieure (supérieure) du segment $\beta(\eta)$ (est possible $\beta_m(\eta) = -\infty$, $\beta_M(\eta) = +\infty$).

De la condition (*b*) sur $\beta(\eta)$ on a que, $\forall \varepsilon > 0$, il y a $\delta'(\varepsilon, \eta)$ tel que

$$\beta_m(\eta) - \varepsilon \leq g(\xi) \leq \beta_M(\eta) + \varepsilon \tag{2,6}$$

p.p. dans $[\eta - \delta'(\varepsilon, \eta), \eta + \delta'(\varepsilon, \eta)]$.

Considérons $\delta(\varepsilon, \eta)$ et $n(\varepsilon, \eta)$ tels que

$$\delta(\varepsilon, \eta) + \frac{1}{n(\varepsilon, \eta)} \leq \delta'(\varepsilon, \eta) \tag{2,7}$$

$$\eta + \delta'(\varepsilon, \eta) < \rho_{n(\varepsilon,\eta)}\,.$$

Soit $n > n(\varepsilon, \eta)$ et $\xi \in [\eta - \delta(\varepsilon, \eta), \eta + \delta(\varepsilon, \eta)]$.

On a

$$g_n(\xi) = n \int_{-1/n}^{1/n} \tilde{g}_n(\xi - \tau)\, \varphi(n\tau)\, d\tau = n \int_{-1/n}^{1/n} g_n(\xi - \tau)\, \varphi(n\tau)\, d\tau\,. \tag{2,9}$$

De (2,6), (2,7), (2,8), (2,9) on a alors le résultat.

Démontrons, enfin, que $\sigma(x) \in \beta(v(x))$ p.p. sur Ω.

De (2,5) pour le théorème de Mazur il y a une suite $\{\rho_{n'k}\}$, $\rho_{n'k} \geq 0$ et $\sum_{k=n'}^{\infty} \rho_{n'k} = 1$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n'}^{\infty} \rho_{n'k}\, g_k(v_k(x)) = \sigma(x) \tag{2,10}$$

dans $\mathfrak{L}^1(\Omega)$, donc p.p. dans Ω.

Soit $\bar{x}$ un point pour lequel (2,10) a lieu.

Fixons $\varepsilon > 0$ arbitraire.

De la partie précédente il y a $\delta(\varepsilon, v(\bar{x}))$ et $n(\varepsilon, v(\bar{x}))$, tels que pour $|\xi - v(\bar{x})| \leq \delta(\varepsilon, v(\bar{x}))$ et $n \geq n(\varepsilon, v(\bar{x}))$

$$\beta_m(v(\bar{x})) - \varepsilon \leq g_n(\xi) \leq \beta_M(v(\bar{x})) + \varepsilon\,.$$

De (2,10) il y a alors $\bar{n}(\varepsilon, v(\bar{x}))$, tel que pour $n \geq \bar{n}(\varepsilon, v(\bar{x}))$

$$\beta_m(v(\bar{x})) - \varepsilon \leq g_n(v_n(\bar{x})) \leq \beta_M(v(\bar{x})) + \varepsilon$$

donc pour $n > n(\varepsilon, v(\bar{x}))$

$$\beta_m(v(\bar{x})) - \varepsilon \leq \sum_{k=n'}^{\infty} \rho_{n'k}\, g_k(v_k(\bar{x})) \leq \beta_M(v(\bar{x})) + \varepsilon\,.$$

De (2,10) on a alors

$$\beta_m(v(\bar{x})) - \varepsilon \leq \sigma(\bar{x}) \leq \beta_M(v(\bar{x})) + \varepsilon .$$

Étant ε arbitraire, on a

$$\beta_m(v(\bar{x})) \leq \sigma(\bar{x}) \leq \beta_M(v(\bar{x}))$$

dont le résultat.

§ 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

Démontrons pour simplicité le théorème dans le cas $\alpha = 0$.

Nous supposons aussi $u_0(x) \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega)$; on peut passer au cas général par une simple régularisation en tronquant $u_0(x)$, [5], et en observant que $j(\eta) \geq 0$.

Observons que, étant $g_n(\eta) \in \mathfrak{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\eta) = g(\eta)$ dans $\mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, on a $j_n(\eta), j(\eta) \in \mathrm{C}(\mathbf{R})$ et

$$\lim_{n\to\infty} j_n(\eta) = j(\eta) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) \tag{3,1}$$

$$\lim_{n\to\infty} j_n(u_0(x)) = j(u_0(x)) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^1(\Omega) . \tag{3,2}$$

Indiquons maintenant par $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ une base de $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ orthonormale, qui est aussi une base de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et telle que $w_k \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, $\forall k$. Soit V_m l'espace engendré par $\{w_k\}_{k=1}^m$, u_{0m} (u_{1m}) telle que

$$\lim_{m\to\infty} u_{0m} = u_0 \qquad \text{dans} \quad \mathrm{H}^1_0(\Omega)$$

$$\Big(\lim_{m\to\infty} u_{1m} = u_1 \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(\Omega)\Big).$$

Considérons le système

$$(\mathrm{I}_m) \qquad \begin{aligned} &(u''_m(t) + \mathrm{A}u_m(t) + g_n(u_m(t)), w)_{\mathfrak{L}^2} = (f(t), w)_{\mathfrak{L}^2} \qquad \forall w \in \mathrm{V}_m \\ &u_m(t) \in \mathrm{V}_m \\ &u_m(0) = u_{0m} \qquad u'_m(0) = u_{1m} . \end{aligned}$$

D'après les resultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles on est assuré de l'existence d'une solution de (I_m) dans l'interval $[0, t_m]$; les éstimations a priori qui suivent montreront que $t_m = \mathrm{T}$.

On a

$$(u''_m(t) + \mathrm{A}u_m(t) + g_n(u_m(t)), u'_m(t))_{\mathfrak{L}^2} = (f(t), u'_m(t))_{\mathfrak{L}^2}$$

dont

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2_{\mathrm{E}} + \int_\Omega j_n(u_m(t,x))\,\mathrm{d}x\right) = (f(t), u'_m(t))_{\mathfrak{L}^2} .$$

En intégrant on a

$$(3,3) \qquad \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_E^2 \leq \|u_{0m}\|_E + \int_\Omega j_n(u_{0m}(x))\,dx - $$
$$- \int_\Omega j_n(u_m(t,x))\,dx + \int_0^t (f(t), u'_m(t))_{\mathfrak{L}^2}\,dt.$$

On peut supposer, sans perdre de généralité, $|u_{0m}(x)| \leq \sup_{x\in\Omega} |u_0(x)|$ p.p. sur Ω; on a alors

$$|j_n(u_{0m}(x))| \leq \sup_{|\eta| \leq \sup|u(x_0)|} |j(\eta)|$$

donc

$$(3,4) \qquad \int_\Omega j_n(u_{0m}(x))\,dx \leq C_1$$

où C_1 ne dépende pas de m et n.

On a aussi

$$(3,5) \qquad j_n(\eta) \geq \min\left(0, 2\inf_{|\eta|\leq 1} g_n(\eta)\right) \geq -2\sup_{|\eta|\leq 1}|g(\eta)| \geq -C_2$$

où C_2 ne dépende pas de m et de n.

De (3,3), (3,4), (3,5) on a

$$(3,6) \qquad \|u_m(t)\|_E^2 \leq C_3$$

où C_3 ne dépende pas de m et n.

De (3,6) on peut supposer, sans perdre de généralité, $t_m = T$ et

$$(3,7) \qquad \lim_{m\to\infty}{}^{**} u_m(t) = u_n(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^\infty(0, T; E)$$

dont

$$(3,8) \qquad \lim_{m\to\infty} u_m(t) = u_n(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$$

dont

$$(3,9) \qquad \lim_{m\to\infty} g_n(u_m(t)) = g_n(u_n(t)) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$$

et

$$(3,10) \qquad \lim_{m\to\infty}{}^{*} u''_m(t) = u''_n(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

De (3,7), (3,8), (3,9), (3,10) on a que $u_n(t)$ est solution du problème

$$(\mathrm{I}_n) \qquad \begin{array}{l} u''_n(t) + Au_n(t) + g_n(u_n(t)) = f(t) \\ u_n(0) = u_0 \quad , \quad u'_n(0) = u_1 . \end{array}$$

De (3,6), (3,7) on a

(3,11) $$\| u_n(t) \|_E \leq C_3 \, .$$

Multiplions l'équation dans (I_n) par $u_n(t)$; on a

$$(u_n''(t) \, , u(t))_{\mathfrak{L}^2} + \| u_n(t) \|_{H_0^1}^2 + (g_n(u_n(t)) \, , u_n(t))_{\mathfrak{L}^2} = (f(t) \, , u_n(t))_{\mathfrak{L}^2}$$

dont

$$\frac{d}{dt} (u_n'(t) \, , u(t))_{\mathfrak{L}^2} + \| u_n(t) \|_{H_0^1}^2 + (g_n(u_n(t)) \, , u_n(t))_{\mathfrak{L}^2} =$$

$$= (f(t) \, , u_n(t))_{\mathfrak{L}^2} + \| u_n'(t) \|_{\mathfrak{L}^2}^2 \, .$$

En intégrant on a

(3,12) $$\int_0^t (\| u_n(t) \|_{H_0^1}^2 + (g_n(u_n(t)) \, , u_n(t))_{\mathfrak{L}^2}) \, dt \leq (u_n'(o) \, , u_n(o))_{\mathfrak{L}^2} -$$

$$- (u_n'(t) \, , u_n(t))_{\mathfrak{L}^2} + \| u_n'(t) \|_{\mathfrak{L}^2(0,T\,;\,\mathfrak{L}^2(\Omega))} + \int_0^t (f(t) \, , u(t))_{\mathfrak{L}^2} \leq$$

$$\leq C_4 + \int_0^T \| f(t) \|_{\mathfrak{L}^2} \| u(t) \|_{\mathfrak{L}^2} \, dt$$

où C_4 ne dépende pas de n.

De (3,12) on a

$$\int_0^T (\| u_n(t) \|_{H_0^1}^2 + (g_n(u_n(t)) \, , u_n(t))_{\mathfrak{L}^2}) \, dt \leq C_5$$

où C_5 est une constante qui ne dépende pas de n; on a alors

(3,13) $$\int_0^T \int_\Omega g_n(u_n(t \, , x)) \, u_n(t \, , x) \, dt \, dx \leq C_5 \, .$$

De (3,11) on peut supposer, sans perdre de généralité,

(3,14) $$\lim_{n \to \infty}{}^{**} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^\infty(o \, , T \, ; E)$$

(3,15) $$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(o \, , T \, ; \mathfrak{L}^2(\Omega)).$$

De (3,13) et (3,15), pour le Lemme 2, § 1, on a

(3,16) $$\lim_{n \to \infty}{}^{*} g_n(u_n(t \, , x)) = \sigma(t \, , x)$$

dans $\mathfrak{L}^1(o \, , T \, ; \mathfrak{L}^1(\Omega))$ et

(3,17) $$\sigma(t \, , x) \in \beta(u(t \, , x))$$

p.p. sur $[o \, , T] \times \Omega$.

De (3,14), (3,16) on a

$$(3,18) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n''(t) = u''(t)$$

dans $\mathcal{L}^1(0, T; \mathcal{L}^1(\Omega)) + \mathcal{L}^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

De (3,14), (3,16), (3,17), (3,18) on a que $u(t)$ est solution du problème (I′) du § 1; le théorème est ainsi démontré.

Pour eclarcir les deux conditions $u(0) = u_0$ $u'(0) = u_1$, nous observons que, étant $u''(t) \in \mathcal{L}^1(0, T; \mathcal{L}^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega))$, $u'(t) \in \mathcal{L}^\infty(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$, $u(t) \in \mathcal{L}^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, $u'(t)$ est faiblement continue dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et $u(t)$ est faiblement continue dans $H_0^1(\Omega)$.

§ 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.

Soit $\{f_n(t)\}$ une suite dans $C(0, T; \mathcal{L}^2(\Omega))$, telle que

$$(4,1) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Considérons le problème

$$(\mathrm{III}_n) \qquad \begin{aligned} & u'(t) + Au(t) + g_n(u(t)) = f_n(t) \\ & u(0) = u_0 . \end{aligned}$$

Le problème (III_n) a une solution $u_n(t)$ dans l'interval $[0, t_n]$; les éstimations a priori qui suivent montreront que $t_n = T$.

On a

$$(4,2) \qquad (u_n'(t) + Au_n(t) + g_n(u_n(t)), u_n(t))_{\mathcal{L}^2} = (f_n(t), u_n(t))_{\mathcal{L}^2}$$

dont

$$(4,3) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = (f_n(t), u_n(t))_{\mathcal{L}^2} - \|u_n(t)\|_{H_0^1}^2 - (g_n(u_n(t)), u_n(t))_{\mathcal{L}^2}.$$

On a $g_n(\eta)\,\eta \geq -2(\sup_{|\eta|\leq 2}|g(\eta)|)\,|\eta| \geq -C_1|\eta|$, où C_1 ne dépende pas de n; donc

$$(4,4) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq (\|f_n(t)\|_{H^{-1}} + C_2)\|u_n(t)\|_{H_0^1} - \|u_n(t)\|_{H_0^1}^2 .$$

En intégrant on a

$$(4,5) \qquad \frac{1}{2}\|u_n(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \int_0^t \{[\|f_n(s)\|_{H^{-1}} + C_2]\|u_n(s)\|_{H_0^1} - \|u_n(s)\|_{H_0^1}^2\}\,ds.$$

De (4,5) et (4,1), [3], on a

$$(4,6) \qquad \|u_n(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq C_3$$

où C_3 ne dépende pas de n; on peut donc supposer $t_n = T$.

De (4,5) on a aussi

(4,7) $$\int_0^T \| u_n(t) \|^2_{H^1_0} \, dt \leq C_4$$

où C_4 ne dépende pas de n.

De (4,3), (4,5), (4,7) on a alors

(4,8) $$\int_0^T \int_\Omega g_n(u_n(t, x)) \, u_n(t, x) \, dt \, dx \leq C_5$$

où C_5 ne dépende pas de n.

De (4,8) on peut supposer, sans perdre de généralité,

(4,9) $$\lim_{n \to \infty}{}^* g_n(u_n(t)) = \sigma(t)$$

dans $\mathfrak{L}^1(o, T; \mathfrak{L}^1(\Omega))$.

De (4,7) on peut supposer, sans perdre de généralité,

(4,10) $$\lim_{n \to \infty}{}^* u_n(t) = u(t)$$

dans $\mathfrak{L}^2(o, T; H^1_0(\Omega))$.

De (4,1), (4,9) et (4,10) on a alors

(4,11) $$\lim_{n \to \infty}{}^* u'_n(t) = u'(t)$$

dans $\mathfrak{L}^2(o, T; H^{-1}(\Omega)) + \mathfrak{L}^1(o, T; \mathfrak{L}^1(\Omega))$.

Enonçons un lemme dont la démonstration est la même du Théorème 5.1. pag. 58 [4]:

LEMME 3. *Soient* $B_0 \subset B \subset B_1$ *trois espaces de Banach et l'injection de* B_0 *dans* B *soit compacte. Posons*

$$W = \{ v \mid v \in \mathfrak{L}^{p_0}(o, T; B_0), \, v' \in \mathfrak{L}^{p_1}(o, T; B_1) \}$$

$1 \leq p_0, p_1 < +\infty$.

Soit $\{ v_n \}$ *une suite dans* W *telle que*

$$\lim_{n \to \infty}{}^* v_n = v \quad dans \quad W.$$

On a alors

$$\lim_{n \to \infty} v_n = v \quad dans \quad \mathfrak{L}^{p_0}(o, T; B).$$

De (4,10), (4,11) et du Lemme 3 on a alors

(4,12) $$\lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans} \quad \mathfrak{L}^2(o, T; \mathfrak{L}^2(\Omega)).$$

De (4,9), (4,12) et du Lemme 2, § 1 on a

$$\sigma(t, x) \in \beta(u(t, x)) \tag{4,13}$$

p.p. sur $[0, T] \times \Omega$.

De (4,9), (4,10), (4,11), (4,13) on a que $u(t)$ est solution du problème (III′); le résultat est ainsi démontré.

Pour eclarcir la condition $u(0) = u_0$, nous observons que, étant $u'(t) \in \mathfrak{L}^1(0, T; \mathfrak{L}^1(\Omega) + H^{-1}(\Omega))$ et $u(t) \in \mathfrak{L}^\infty(0, T; \mathfrak{L}^2(\Omega))$ (de (4,6)), on a que $u(t)$ est faiblement continue dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$.

Le Théorème 3 a une démonstration analogue à celle du Théorème 2 et nous ne l'examinerons pas.

Bibliographie

[1] AMERIO L. et PROUSE G., *Almost periodic functions and functional equations*, Van Nostrand Reinhold 1971.

[2] AMERIO L. et PROUSE G., *On the non linear wave equation with dissipative term discontinuous with respect to the velocity*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *44* (1968).

[3] BIROLI M. *Sur les solutions bornées ou presque périodiques des équations d'évolution multivoques dans les espaces de Hilbert*, « Ricerche di Mat. », *21* [1], 17–47 (1972).

[4] LIONS J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod–Gauthier Villars, 1969.

[5] STAMPACCHIA G., *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Les Presses de l'Université de Montreal, 1966.